UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

Nhận bài:
06 – 06 – 2017
Chấp nhận đăng:
20 – 09 – 2017
http://jshe.ued.udn.vn/

ĐẶC TRƯNG CỦA GIAN KHÔNG GIAN VỚI cs - MẠNG ĐẾM ĐƯỢC ĐỊA PHƯƠNG BỞI ẢNH CỦA KHÔNG GIAN METRIC KHẢ LI ĐỊA PHƯƠNG

Lương Quốc Tuyển[a*], Nguyễn Thị Sinh[b]

Tóm tắt: Trong [2], Trần Văn Ân và Lương Quốc Tuyển đã chứng minh rằng không gian *sn*-đối xứng với *cs*-mạng đếm được tương đương với ảnh compact giả-phủ-dãy của không gian metric khả li, tương đương với π-ảnh thương-dãy của không gian metric khả li, và không gian *sn*-đối xứng Cauchy với *cs*-mạng đếm được tương đương với ảnh compact 1-phủ-dãy phủ-compact của không gian metric khả li, tương đương với π-ảnh phủ-dãy của không gian metric khả li. Ngoài ra, trong [6, 7], Lương Quốc Tuyển đã chứng minh rằng không gian sn-đối xứng với *cs*-mạng đếm được địa phương tương đương với *ss*-ảnh compact phủ-compact của không gian metric khả li địa phương, và không gian *sn*-đối xứng Cauchy với *cs*-mạng đếm được địa phương tương đương với *ss*-ảnh compact phủ-dãy, phủ-compact của không gian metric khả li địa phương. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh rằng không gian với *cs*-mạng đếm được địa phương tương đương với *ss*-ảnh phủ-dãy phủ-compact của không gian metric khả li địa phương.

Từ khóa: mạng; *cs*-mạng; phủ-dãy; phủ-compact; *ss*-ánh xạ; đếm được địa phương.

1. Giới thiệu

Một trong những bài toán trọng tâm của topo đại cương là thiết lập mối quan hệ giữa không gian topo và không gian metric qua các ánh xạ thích hợp (xem [1, 2, 3, 6]). Trong [1, 2, 6, 7], các tác giả đã thu được nhiều đặc trưng ảnh "đẹp" của không gian metric khả li hoặc không gian metric khả li địa phương qua các ánh xạ compact, ss-ánh xạ và π-ánh xạ với các tính chất phủ-dãy, giả-phủ-dãy, phủ-compact và thương-dãy. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu đặc trưng của không gian với *cs*-mạng đếm được địa phương và chứng minh rằng không gian với *cs*-mạng đếm được địa phương tương đương với *ss*-ảnh compact phủ-dãy phủ-compact của không gian metric khả li địa phương.

Trong toàn bộ bài viết, khi nói đến không gian X, ta hiểu rằng X là không gian topo và chúng tôi quy ước rằng tất cả các không gian là T_1 và chính quy, còn các khái niệm và thuật ngữ khác, nếu không nói gì thêm thì được hiểu thông thường. Ngoài ra, chúng tôi còn dùng thêm các kí hiệu:

$$\bigcup\mathcal{P} = \bigcup\{P : P \in \mathcal{P}\},$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

2. Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết

2.1.1. Định nghĩa([3, 5]). Giả sử $\mathcal{P}$ là một họ gồm các tập con nào đó của X. Khi đó,

(1) $\mathcal{P}$ được gọi là *k-mạng*, nếu với mọi tập con compact $K \subset X$ và với mọi lân cận mở U của K trong X, tồn tại một họ con hữu hạn $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ sao cho

$$K \subset \bigcup\mathcal{F} \subset U.$$

(2) $\mathcal{P}$ được gọi là *cs-mạng*, nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x và với mọi lân cận U của x, tồn tại $P \in \mathcal{P}$ và $m \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\{x\} \cup \{x_n : n \geq m\} \subset P \subset U.$$

(3) $\mathcal{P}$ được gọi là *cs^*-mạng*, nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x và với mọi lân cận U của x, tồn tại $P \in \mathcal{P}$ và một dãy con $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho

[a,b]Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng
*** Liên hệ tác giả**
Lương Quốc Tuyển
Email: lqtuyen@ued.udn.vn

$$\{x\} \cup \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset P \subset U.$$

(4) $\mathcal{P}$ được gọi là *họ đếm được địa phương*, nếu với mỗi $x \in X$, tồn tại lân cận V_x của x sao cho V_x chỉ giao với nhiều nhất là đếm được phần tử của $\mathcal{P}$.

(5) $\mathcal{P}$ được gọi là họ *sao-đếm được*, nếu với mỗi $P \in \mathcal{P}$, P giao nhiều nhất là đếm được phần tử của $\mathcal{P}$.

(6) $\mathcal{P}$ được gọi là họ *điểm-đếm được*, nếu mỗi phần tử của X chỉ thuộc nhiều nhất là đếm được phần tử của $\mathcal{P}$.

(7) Không gian X được gọi là $\aleph_0$-*không gian*, nếu nó có *k*-mạng đếm được.

(8) Tập con $P \subset X$ được gọi là tập *mở theo dãy*, nếu với mỗi dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $x \in P$, tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\{x\} \cup \{x_n : n \geq m\} \subset P.$$

2.1.2. Nhận xét ([3])

(1) Nếu $\mathcal{P}$ là cs-mạng, thì $\mathcal{P}$ là cs*-mạng.

(2) X là $\aleph_0$-không gian $\Leftrightarrow$ X có cs-mạng đếm được.

2.1.3. Định nghĩa ([2,3]). Giả sử $f : M \to X$ là một ánh xạ. Khi đó,

(1) f được gọi là *ss-ánh xạ*, nếu với mỗi $x \in X$, tồn tại lân cận V_x của x sao cho $f^{-1}(V_x)$ là tập con khả li của M.

(2) f được gọi là ánh xạ *phủ-dãy*, nếu mỗi dãy hội tụ trong X là ảnh của dãy nào đó hội tụ trong M.

(3) f được gọi là ánh xạ *thương-dãy*, nếu mỗi dãy S hội tụ trong X, tồn tại dãy L hội tụ trong M sao cho $f(L)$ là một dãy con của S.

(4) f được gọi là ánh xạ *phủ-compact*, nếu với mỗi tập con compact của X là ảnh của tập con compact nào đó trong M.

2.1.4. Bổ đề ([5]). *Nếu $\mathcal{P}$ là họ sao-đếm được của X, thì*

$$\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha \in \Lambda\},$$

trong đó mỗi $\mathcal{P}_\alpha$ là họ con đếm được của $\mathcal{P}$ và với mọi $\alpha \neq \beta$ ta có

$$(\bigcup \mathcal{P}_\alpha) \cap (\bigcup \mathcal{P}_\beta) = \varnothing.$$

2.1.5. Bổ đề ([4]). *Đối với không gian X, các khẳng định sau là tương đương.*

(1) *X là $\aleph_0$-không gian;*

(2) *X là ảnh phủ-dãy, phủ-compact của một không gian metric khả li;*

(3) *X là ảnh thương-dãy của một không gian metric khả li.*

2.1.6. Bổ đề ([3]). *Mỗi không gian con compact có k-mạng điểm-đếm được là khả metric.*

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lí thuyết trong quá trình thực hiện bài báo. Nghiên cứu tài liệu của những tác giả đi trước để đưa ra kết quả mới cho bài báo.

3.Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

3.1.1. Bổ đề ([3]). *Đối với không gian X, các khẳng định sau là tương đương:*

(1) *X là không gian có cs*-mạng đếm được địa phương;*

(2) *X là không gian có k-mạng đếm được địa phương;*

(3) *X là không gian có cs-mạng đếm được địa phương.*

3.1.2. Định lí. *Đối với không gian X, các khẳng định sau là tương đương:*

(1) *X có cs-mạng đếm được địa phương;*

(2) *X là ss-ảnh phủ-dãyvà phủ-compact của một không gian metric khả li địa phương;*

(3) *X là ss-ảnh thương-dãy của một không gian metric khả li địa phương.*

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2). Giả sử $\mathcal{P}$ là cs-mạng đếm được địa phương của X. Bởi vì X là không gian chính quy nên ta có thể giả thiết rằng mỗi phần tử của $\mathcal{P}$ là đóng. Hơn nữa, vì $\mathcal{P}$ là họ đếm được địa phương nên với mỗi $x \in X$, tồn tại lân cận V_x của x chỉ giao nhiều nhất là đếm được phần tử của $\mathcal{P}$. Đặt

$$\mathfrak{I} = \{P \in \mathcal{P} : P \subset V_x,\ x \in X\}.$$

Khi đó, $\mathfrak{I}$ vừa là mạng đếm được địa phương vừa là mạng sao-đếm được của X. Do vậy, theo *Bổ đề 2.4* ta suy ra rằng

$$\mathfrak{I} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{I}_\alpha,$$

trong đó mỗi $\Im_\alpha$ là họ con đếm được của $\Im$ và với mọi $\alpha \neq \beta$ ta có:

$$(\mathrm{U}\Im_\alpha) \cap (\mathrm{U}\Im_\beta) = \varnothing.$$

Bây giờ, với mỗi $\alpha \in \Lambda,$ ta đặt

$$X_\alpha = \mathrm{U}\Im_\alpha.$$

Khi đó, X_α là tập mở theo dãy trong X và $\Im_\alpha$ là *cs*-mạng đếm được của X_α với mọi $\alpha \in \Lambda.$ Bởi thế, mỗi X_α là $\aleph_0$-không gian. Sử dụng *Bổ đề 2.5*, với mỗi $\alpha \in \Lambda,$ tồn tại ánh xạ phủ-dãy, phủ-compact

$$f_\alpha : M_\alpha \to X_\alpha,$$

trong đó M_α là không gian metric khả li. Đặt:

$$M = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha,\ Z = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha,$$
$$f = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha : M \to Z$$

và đặt $h: Z \to X$ là phép chiếu tự nhiên. Khi đó, M là không gian metric khả li địa phương. Hơn nữa, nếu ta đặt $g = f \circ h,$ thì

(a) g là *ss*-ánh xạ. Giả sử $x \in X.$ Khi đó, vì P là họ đếm được địa phương nên tồn tại lân cận V_x của x sao cho tập hợp

$$\Delta_x = \left\{\alpha \in \Lambda : V_x \cap P_\alpha \neq \varnothing\right\}$$

là đếm được. Hơn nữa, vì

$$g^{-1}(V_x) = f^{-1}\left[h^{-1}(V_x)\right]$$
$$\subset f^{-1}\left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_x} P_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_x} M_\alpha$$

nên ta suy ra $g^{-1}(V_x)$ là tập con khả li của $\bigoplus_{\alpha\in\Delta_x} M_\alpha.$

Do vậy, g là *ss*-ánh xạ.

(b) g là ánh xạ phủ-dãy. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ đến $x \in X.$ Khi đó, tồn tại $\alpha \in \Lambda$ sao cho $x \in P_\alpha.$ Mặt khác, vì P là *cs*-mạng nên tồn tại $m \in ¥$ sao cho

$$\{x\} \mathrm{U} \{x_n : n \geq m\} \subset P_\alpha.$$

Hơn nữa, vì f_α là ánh xạ phủ-dãy nên tồn tại

$$\{z_n : n \geq m\} \subset M_\alpha$$

sao cho $\{z_n : n \geq m\}$ hội tụ đến z_x trong $M_\alpha,$ và $f_\alpha(z_n) = x_n$ với mọi $n \geq m.$

Bây giờ, với mỗi $n < m,$ ta lấy $z_n \in f^{-1}(x_n).$ Khi đó, $\{z_n\}$ là dãy hội tụ đến z_x trong M, $z_n \in g^{-1}(x_n)$ với mọi $n \in ¥$.

Do vậy, g là ánh xạ phủ-dãy.

(c) g là ánh xạ phủ-compact. Giả sử K là tập con compact của $X.$ Bởi vì X có *cs*-mạng đếm được địa phương và K là compact nên

$$\wp = \left\{P \in \Im : P \cap K \neq \varnothing\right\}$$

là *cs*-mạng đếm được của không gian con $K.$ Bởi thế, theo *Nhận xét 2.2* và *Bổ đề 2.6*, K khả metric. Hơn nữa, vì mỗi X_α là tập mở theo dãy trong X và

$$X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$$

nên ta suy ra rằng

$$\Gamma = \left\{\alpha \in \Lambda : K \cap X_\alpha \neq \varnothing\right\}$$

là hữu hạn. Bây giờ, với mỗi $\alpha \in \Lambda,$ ta đặt

$$K_\alpha = K \cap X_\alpha.$$

Bởi vì K khả metric và mỗi X_α là tập mở theo dãy nên K_α là tập con compact trong X_α với mọi $\alpha \in \Lambda.$ Mặt khác, vì mỗi f_α là ánh xạ phủ-compact nên với mỗi $\alpha \in \Lambda,$ tồn tại tập con compact L_α trong X_α sao cho

$$f(L_\alpha) = K_\alpha.$$

Cuối cùng, nếu ta đặt

$$L = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} L_\alpha,$$

thì L là tập con compact của M và $g(L) = K.$

Do vậy, g là ánh xạ phủ-compact.

$(2) \Rightarrow (3).$ Hiển nhiên:

$(3) \Rightarrow (1).$ Giả sử $f: M \to X$ là *ss*-ánh xạ thương-dãy, trong đó M là một không gian metric. Bởi vì M là không gian metric nên tồn tại cơ sở điểm-đếm được $\wp.$ Ta đặt

$$\Im = \left\{ f(B) : B \in \wp\right\}.$$

Khi đó,

(a) $\Im$ là họ đếm được địa phương. Giả sử $x \in X.$ Bởi vì f là *ss*-ánh xạ nên với mỗi $x \in X,$ tồn tại lân cận V_x sao cho $f^{-1}(V_x)$ là tập con khả li của M. Do đó, tồn tại tập con đếm được $D \subset f^{-1}(V_x)$ sao cho

$$f^{-1}(V_x) \subset \overline{D}.$$

Hơn nữa, vì $\wp$ là họ điểm-đếm được và với $B \in \wp$, ta có

$$B \cap D \neq \varnothing \text{ khi và chỉ khi } B \cap \overline{D} \neq \varnothing$$

nên ta suy ra $f^{-1}(V_x)$ giao nhiều nhất là đếm được phần tử của $\wp$, kéo theo V_x giao nhiều nhất là đếm được phần tử của $\Im$. Do vậy, $\Im$ là họ đếm được địa phương.

(b) $\Im$ là cs^*-mạng của X. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy hội tụ đến x trong X và U là lân cận bất kỳ của x. Khi đó, vì f là ánh xạ thương-dãy và $f^{-1}(U)$ là lân cận của x nên tồn tại dãy $\{z_n\}$ hội tụ đến $z_x \in f^{-1}(U)$ trong M sao cho $\{f(z_n)\}$ là dãy con của $\{x_n\}$. Mặt khác, vì $\wp$ là cơ sở của M nên tồn tại $B \in \wp$ và $m \in ¥$ sao cho

$$\{z_x\} \mathrm{U} \{z_n : n \geq m\} \subset B \subset U.$$

Suy ra

$$\{x\} \mathrm{U} \{f(z_n) : n \geq m\} \subset f(B) \subset U.$$

Do vậy, $\Im$ là cs^*-mạng.

Từ chứng minh trên ta suy ra rằng X là không gian có *cs*-mạng đếm được địa phương.

3.2. Đánh giá

Bài toán đặc trưng của không gian với tính chất mạng thông qua ảnh "đẹp" của không gian metric là một trong những bài toánđược nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm. Trong bài báo này, chúng tôi đã đưa ra được một đặc trưng mới của T_1-không gian chính quy với *cs*-mạng đếm được địa phương thông qua *ss*-ảnh phủ-dãy phủ-compact của một không gian metric khả li địa phương. Tuy nhiên, kết quả này trên T_2-không gian vẫn đang còn mở.

4.Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã chứng minh được rằng không gian với *cs*-mạng đếm được địa phương tương đương với *ss*-ảnh phủ-dãy, phủ-compact của một không gian metric khả li địa phương.

Tài liệu tham khảo

[1] T. V. An and L. Q. Tuyen (2011). On an affirmative answer to S. Lin's problem. *Topology and its Applications*, 158, 1567-1570.

[2] T. V. An and L. Q. Tuyen (2012). On π-images of separable metric spaces and a problem of Shou Lin. *Mat. Vesnik*, 64 (4), 297-302.

[3] X. Ge (2007). Spaces with a locally countable sn-network. *Lobachevskii J. Math*., 26, 33-49.

[4] Y. Ge (2005). $\aleph_0$-spaces and images of separable metric spaces. *Siberian Elec. Math. Rep*., 74, 62-67.

[5] M. Sakai(1997), "On spaces with a star-countable k-networks", Houston J. Math.,23(1), 45-56.

[6] L. Q. Tuyen (2014). Some characterizations of spaces with locally countable networks. *Mat. Vesnik*, 66 (1), 84-90.

[7] L. Q. Tuyen (2013). A new characterization of spaces with locally countable sn-networks. *Mat. Vesnik*, 65 (1), 8-13.

CHARACTERISTICS OF SPACES WITH LOCALLY COUNTABLE CS-NETWORKS VIA IMAGES OF LOCALLY SEPARABLE METRIC SPACES

Abstract: In [2], Tran Van An and Luong Quoc Tuyen proved that *sn*-symmetric spaces with countable *cs*-networks are equivalent with pseudo-sequence-covering compact images of separable metric spaces, equivalent with quotient-sequentially π-images of separable metric spaces, and Cauchy *sn*-symmetric spaces with countable *cs*-networks are equivalent with 1-sequence-covering compact-covering compact images of separable metric spaces, equivalent with sequence-covering π-images of a separable metric spaces. Besides, in [6, 7], Luong Quoc Tuyen proved that *sn*-symmetric spaces with locally countable *cs*-networks are equivalent with compact-covering compact *ss*-images of locally separable metric spaces, and Cauchy *sn*-symmetric spaces with locally countable *cs*-networks are equivalent with sequence-covering compact-covering compact *ss*-images of locally separable metric spaces. In this artcle, we prove that spaces with locally countable *cs*-networks are equivalent with sequence-covering compact-covering*ss*-images of locally separable metric spaces.

Key words: networks; cs-networks; sequence-covering; compact-covering; ss-maps; locally countable.