UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

TẬP CON TIỀN COMPACT TRONG NHÓM PARATÔPÔ

Ông Văn Tuyên

Nhận bài:
05 – 07 – 2017
Chấp nhận đăng:
25 – 09 – 2017
http://jshe.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Nhóm paratôpô G là một nhóm G cùng với một tôpô trên G sao cho ánh xạ tích $p:G\times G\to G$ được xác định bởi $p(x,y)=xy$ với mọi $x,\ y\in G$ là liên tục. Gần đây, nhóm paratôpô đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả và họ đã đặt ra nhiều câu hỏi mở mà đến nay vẫn chưa có lời giải đáp. Hơn nữa, trong [1], A. V. Arhangel'skii và M. Tkachenko đã giới thiệu tập con tiền compact trong nhóm tôpô và đã chứng minh được rằng nếu A và B là các tập con tiền compact của nhóm tôpô $G,$ thì AB là tập con tiền compact trong $G.$ Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng kết quả này trên nhóm paratôpô.

Từ khóa: nhóm tôpô; nhóm paratôpô; tập con tiền compact; tập con hữu hạn; ánh xạ tích.

1. Giới thiệu

Năm 1936, G. Birkhoff đã giới thiệu nhóm tôpô ([2]). Sau đó, A. V. Arhangel'skii và M. Tkachenko đã giới thiệu một số tính chất của nhóm tôpô và nhóm paratôpô, đồng thời chỉ ra rằng mọi nhóm tôpô đều là nhóm paratôpô, nhưng tồn tại một nhóm paratôpô không phải là một nhóm tôpô ([1]). Từ đó đến nay, rất nhiều kết quả liên quan đến nhóm paratôpô được các nhà toán học quan tâm nghiên cứu (xem [3, 4, 5]).

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra và chứng minh được rằng nếu A và B là các tập con tiền compact của nhóm paratôpô $G,$ thì AB là tập con tiền compact trong $G.$

Trong toàn bộ bài báo, chúng tôi quy ước tất cả các không gian là $T_1,$ nhóm G có phần tử đơn vị e và phần tử khả nghịch của $x\in G$ ký hiệu là $x^{-1}.$

2. Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết

Nhóm tôpô G là một nhóm G cùng với một tôpô trên G sao cho ánh xạ tích $p:G\times G\to G$ được xác định bởi $p(x,y)=xy$ và ánh xạ ngược $q:G\to G$ được xác định bởi $q(x)=x^{-1}$ với mọi $x,\ y\in G$ là liên tục.

Giả sử G là nhóm paratôpô. Ta cố định $x\in G$ và xét các ánh xạ $f_x,\ g_x:G\to G$ xác định như sau với mọi $y\in G.$

$$f_x(y)=p(x,y)=xy;$$
$$g_x(y)=p(y,x)=yx.$$

Khi đó, $f_x,\ g_x$ là các phép đồng phôi.

Giả sử G là nhóm paratôpô (hoặc nhóm tôpô) và $A\subset G.$ Khi đó, A được gọi là *tiền compact* trong $G,$ nếu với mỗi lân cận mở U của $e,$ tồn tại tập con hữu hạn $F\subset G$ sao cho

$$A\subset FU\cap UF.$$

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lí thuyết trong quá trình thực hiện bài báo. Nghiên cứu tài liệu của các tác giả đi trước để đưa ra những kết quả mới.

3. Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

Bổ đề 3.1.1. *Giả sử G là nhóm paratôpô, $A\subset G$ và U là một tập con mở của $G.$ Khi đó, AU và UA là các tập con mở trong $G.$*

* **Liên hệ tác giả**
Ông Văn Tuyên
Trường THPT Ông Ích Khiêm, Đà Nẵng
Email: tuyenvan612dn@gmail.com

Chứng minh. Giả sử $x \in A$. Khi đó, f_x, g_x là các phép đồng phôi, kéo theo f_x, g_x là các ánh xạ mở. Do vậy,

$$f_x(U) = p(x,U) = xU;$$
$$g_x(U) = p(U,x) = Ux$$

là các tập mở trong G với mọi $x \in A$. Hơn nữa, vì

$$AU = \bigcup_{x\in A} xU;$$
$$UA = \bigcup_{x\in A} Ux$$

nên ta suy ra rằng AU và UA là các tập mở trong G.

Bổ đề 3.1.2. *Giả sử G là nhóm paratôpô. Ta cố định $y \in G$ và xét các ánh xạ $f, g : G \to G$ xác định như sau với mọi $x \in G$.*

$$f(x) = y^{-1}xy;$$
$$g(x) = yxy^{-1}.$$

Khi đó, f, g liên tục trên G.

Chứng minh. Giả sử $x \in G$ và U là một lân cận mở của $f(x) = y^{-1}xy = p(y^{-1}, p(x,y))$. Khi đó, vì p liên tục nên tồn tại các lân cận mở V của y^{-1} và W của $p(x,y) = xy$ sao cho $p(V,W) = VW \subset U$. Hơn nữa, vì W là lân cận mở của $p(x,y) = xy$ và p liên tục nên tồn tại các lân cận mở U_1 của x và U_2 của y sao cho $p(U_1,U_2) = U_1U_2 \subset W$. Bởi thế,

$$VU_1U_2 \subset VW \subset U.$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$f(U_1) = y^{-1}U_1y \subset VU_1U_2 \subset U.$$

Do đó, f liên tục tại x. Như vậy, f liên tục trên G.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chỉ ra được rằng g liên tục trên G.

Định lí 3.1.3. *Giả sử A, B là các tập con tiền compact của nhóm paratôpô G. Khi đó, AB là tập con tiền compact trong G.*

Chứng minh. Giả sử U là lân cận mở của e. Khi đó, nhờ Bổ đề 3.1.1, ta suy ra xU và Ux là các lân cận mở của x. Hơn nữa, vì $p(e,e) = ee = e$ và p liên tục nên tồn tại các lân cận mở U_1, U_2 của e sao cho

$$p(U_1,U_2) = U_1U_2 \subset U.$$

Do đó, nếu ta đặt

$$V = U_1 \cap U_2,$$

thì V là lân cận mở của e và $V^2 \subset U$.

Bây giờ, để chứng minh AB là tiền compact trong G thì trước tiên ta chứng minh rằng tồn tại tập hữu hạn $M \subset G$ sao cho

$$AB \subset MU.$$

Thật vậy,

(1) Bởi vì B là tiền compact nên tồn tại tập hữu hạn $F \subset G$ sao cho $B \subset FV$.

(2) Với mỗi $y \in F$, tồn tại lân cận mở W_y của e sao cho $y^{-1}W_yy \subset V$. Thật vậy, với mỗi $y \in F$, nhờ Bổ đề 3.1.2 ta suy ra ánh xạ $f : G \to G$ xác định bởi $f(x) = y^{-1}xy$ với mọi $x \in G$ là liên tục. Hơn nữa, vì $f(e) = e$ và V là lân cận mở của e nên $f^{-1}(V)$ là lân cận mở của e. Do đó, tồn tại lân cận mở W_y của e sao cho $W_y \subset f^{-1}(V)$, kéo theo

$$y^{-1}W_yy = f(W_y) \subset V.$$

(3) Với mỗi $y \in F$, bởi vì W_y là lân cận mở của e và A là tiền compact nên tồn tại tập hữu hạn $K_y \subset G$ sao cho $A \subset K_yW_y$. Bây giờ, nếu ta đặt $K = \bigcup_{y\in F} K_y$ và $M = KF$, thì hiển nhiên rằng M là tập hữu hạn. Hơn nữa, $AB \subset MU$. Thật vậy, giả sử $a \in A$ và $b \in B$. Khi đó, vì $B \subset FV$ nên tồn tại $y \in F$ sao cho $b \in yV$. Mặt khác, vì $A \subset K_yW_y$ nên tồn tại $x \in K_y$ sao cho $a \in xW_y$. Do vậy,

$$\begin{aligned} ab \in xW_yyV = xyy^{-1}W_yyV &= xy(y^{-1}W_yy)V \\ &\subset xyVV = xyV^2 \subset xyU \\ &\subset K_yFU \subset KFU = MU. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng $AB \subset MU$.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại tập hữu hạn $P \subset G$ sao cho

$$AB \subset UP.$$

Thật vậy,

(4) Bởi vì A là tiền compact nên tồn tại tập hữu hạn $F \subset G$ sao cho $A \subset VF.$

(5) Với mỗi $y \in F,$ tồn tại lân cận mở W_y của e sao cho $yW_y y^{-1} \subset V.$ Thật vậy, với mỗi $y \in F,$ nhờ *Bổ đề 3.1.2* ta suy ra ánh xạ $g: G \to G$ xác định bởi $g(x) = yxy^{-1}$ với mọi $x \in G$ là liên tục. Hơn nữa, vì $g(e) = e$ và V là lân cận mở của e nên $g^{-1}(V)$ là lân cận mở của $e.$ Do đó, tồn tại lân cận mở W_y của e sao cho $W_y \subset g^{-1}(V),$ kéo theo

$$yW_y y^{-1} = g(W_y) \subset V.$$

(6) Với mỗi $y \in F,$ bởi vì W_y là lân cận mở của e và B là tiền compact nên tồn tại tập hữu hạn $K_y \subset G$ sao cho $B \subset W_y K_y.$ Bây giờ, nếu ta đặt $K = \bigcup_{y \in F} K_y$ và $P = FK,$ thì hiển nhiên rằng P là tập hữu hạn. Hơn nữa, $AB \subset UP.$ Thật vậy, giả sử $a \in A$ và $b \in B.$ Khi đó, vì $A \subset VF$ nên tồn tại $y \in F$ sao cho $a \in Vy.$ Mặt khác, vì $B \subset W_y K_y$ nên tồn tại $x \in K_y$ sao cho $b \in W_y x.$ Do vậy,

$$\begin{aligned} ab \in VyW_y x &= VyW_y y^{-1}yx = V(yW_y y^{-1})yx \\ &\subset VV = V^2 yx \subset Uyx \\ &\subset UFK_y \subset UFK = UP. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng $AB \subset UP.$

Cuối cùng, nếu ta đặt $D = M \cup P,$ thì D là tập hữu hạn và $AB \subset DU \cap UD.$

Do đó, ta suy ra rằng AB là tiền compact trong $G.$

Hệ quả 3.1.4 ([1]). *Giả sử A, B là các tập con tiền compact của nhóm tôpô $G.$ Khi đó, AB là tập con tiền compact trong $G.$*

3.2. Đánh giá

Chúng tôi mở rộng một kết quả trong [1] trên nhóm paratôpô và được thể hiện trong *Định lí 3.1.3*.

4.Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh được rằng nếu A và B là các tập con tiền compact của nhóm paratôpô $G,$ thì AB là tập con tiền compact trong $G.$ Nhờ đó, chúng tôi nhận lại được kết quả trong [1].

Tài liệu tham khảo

[1] Arhangel'skii A. V. and Tkachenko M. (2008). *Topological Groups and Related Structures, Atlantis Press/World Scientific*. Paris-Amsterdam.

[2] Birkhoff G. (1936). A note on topological groups. *Comput. Math.*, 3, 427-430.

[3] Lin F. and Liu C. (2012). On paratopological groups. *Topology Appl.*, 159, 2764-2773.

[4] Peng L.-X. (2015). A note on semitopological groups and paratopological groups. *Topology Appl.*, 191, 143-152.

[5] Sánchez I. (2015). Dense subgroups of paratopological groups. *Topology Appl.*, 196, 241-248.

PRECOMPACT SUBSETS IN PARATOPOLOGICAL GROUPS

Abstract: A paratopological group G is a group G with a topology such that the product map $p: G \times G \to G$ is defined with $p(x, y) = xy$ for every $x, y \in G$ that is continuous. Recently, paratopological groups have been studied by many authors who have raised many open questions that have yet to be answered. Furthermore, in [1], A. V. Arhangel'skii and M. Tkachenko introduced precompact subsets in topological groups and proved that if A and B are precompact subsets of a topological group $G,$ then AB is precompact in $G.$ In this article, we extend this result on paratopological groups.

Key words: topological group; paratopological group; precompact subset; finite subset; product map.