UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

# MIỀN HỘI TỤ CỦA CHUỖI HÀM LŨY THỪA VỚI HỆ SỐ HỮU TỈ

Nguyễn Thị Hà Phương[a*], Phan Đức Tuấn[b]

Nhận bài:
19 – 07 – 2017
Chấp nhận đăng:
25 – 09 – 2017
http://jshe.ued.udn.vn/

**Tóm tắt:** Công thức Taylor cho phép ta khai triển một hàm khả vi vô hạn lần thành một chuỗi hàm lũy thừa. Ngược lại chính là bài toán tính tổng của một chuỗi hàm lũy thừa. Trước khi tính tổng của một chuỗi hàm lũy thừa ta phải đi tìm miền hội tụ của nó vì trên miền hội tụ ấy tổng của chuỗi hàm mới tồn tại. Từ đó, dẫn đến bài toán đi tìm bán kính hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa.

Ta biết, nếu $u_n \sim av_n$ khi $n$ dần đến vô cùng thì hai chuỗi hàm lũy thừa với hệ số là $u_n, v_n$ sẽ có cùng bán kính hội tụ. Điều này cho phép ta xác định các lớp chuỗi hàm lũy thừa có cùng bán kính hội tụ thông qua việc so sánh hệ số của chúng khi $n$ dần đến vô cùng. Trong [5], các tác giả đã chọn hàm lũy thừa $ax^{\alpha}$ làm đại lượng trung gian trong việc so sánh các đại lượng vô cùng bé khi $x$ dần đến 0. Trong bài báo này chúng tôi chọn hệ số $u_n = 1/n^{\alpha}$ làm chuẩn để xác định lớp các chuỗi hàm lũy thừa có cùng bán kính hội tụ với chuỗi hàm lũy thừa nhận $u_n$ làm hệ số. Sau đó, chúng tôi chỉ ra trong lớp này chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ có cùng miền hội tụ với chuỗi hàm lũy thừa nhận $u_n$ làm hệ số.

**Từ khóa:** chuỗi hàm; chuỗi hàm lũy thừa; bán kính hội tụ; miền hội tụ; tiêu chuẩn so sánh; khai triển Taylor.

## 1. Đặt vấn đề

Ta biết, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n|}{|v_n|} = \lambda \in \mathbb{R}_+ \qquad (1)$$

thì bán kính hội tụ của hai chuỗi hàm lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n x^n \qquad (2)$$

là bằng nhau (xem [3]).

Một câu hỏi đặt ra là: *nếu (1) được thỏa mãn thì miền hội tụ của hai chuỗi hàm lũy thừa (2) có trùng nhau không*?

Để trả lời cho câu hỏi trên, ta xét hai chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \qquad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n} + (-1)^n}{n}. \qquad (4)$$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2\sqrt{n} + (-1)^n}{n}\right| \left|\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n}\right| = 2. \qquad (5)$$

trong khi đó, chuỗi số (3) thì hội tụ còn chuỗi số (4) thì phân kì. Điều này chứng tỏ, miền hội tụ của hai chuỗi hàm lũy thừa (2) là không trùng nhau.

Trên cơ sở đó, chúng tôi khởi đầu bài báo này bằng việc tìm miền hội tụ $\Delta$ của chuỗi hàm lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha}} \qquad (6)$$

và thu được kết quả là (xem [3]):

i.Nếu $\alpha > 1$ thì $\Delta = [-1,1]$.

ii.Nếu $0 < \alpha \le 1$ thì $\Delta = [-1,1)$.

iii.Nếu $\alpha \le 0$ thì $\Delta = (-1,1)$.

Sau đó, chúng tôi đi tìm trong số các chuỗi hàm lũy thừa

[a,b]Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng
* Liên hệ tác giả
Nguyễn Thị Hà Phương
Email: nthphuong_kt@ued.udn.vn

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\, x^n \qquad (7)$$

thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n|}{1/n^{\alpha}} = \lambda \in \mathbb{R}_+ \qquad (8)$$

chuỗi hàm nào có miền hội tụ trùng với chuỗi hàm lũy thừa (6). Trong bài báo này chúng tôi chứng minh *chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ* (9) nếu thỏa mãn điều kiện (8) sẽ có miền hội tụ trùng với chuỗi hàm lũy thừa (6).

## 2. Chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ

Chúng tôi bắt đầu từ chuỗi hàm lũy thừa có dạng

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{p_0 n^k + p_1 n^{k-1} + \ldots + p_k}{q_0 n^m + q_1 n^{m-1} + \ldots + q_m}\, x^n \qquad (9)$$

trong đó, $k, m \in \mathbb{N}$; $p_i, q_j \in \mathbb{R}$ $\left(i = \overline{0,k};\ j = \overline{0,m}\right)$; $p_0 \neq 0,\ q_0 \neq 0$ và $q_0 n^m + q_1 n^{m-1} + \ldots + q_m > 0,\ \forall n \geq n_0.$

Do sự hội tụ, phân kì của hai chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n;\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n,\ (\lambda \neq 0)$$

là như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $p_0 = q_0 = 1.$ Nghĩa là, chuỗi hàm lũy thừa (9) được viết lại dưới dạng

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^k + p_1 n^{k-1} + \ldots + p_k}{n^m + q_1 n^{m-1} + \ldots + q_m}\, x^n := \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)}\, x^n. \qquad (10)$$

***Định nghĩa 2.1.*** Chuỗi hàm (10) được gọi là *chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ* và số $\alpha = m - k$ được gọi là *độ lệch bậc* của chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ (10).

***Định lí 2.2.*** *Cho $\alpha$ là độ lệch bậc của chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ (10). Khi đó, miền hội tụ của hai chuỗi hàm (10) và (6) là trùng nhau. Nghĩa là:*

*i. Nếu $\alpha > 1$ thì miền hội tụ của chuỗi hàm (10) là* $[-1;1]$.

*ii. Nếu $0 < \alpha \leq 1$ thì miền hội tụ của chuỗi hàm (10) là* $[-1;1)$.

*iii. Nếu $\alpha \leq 0$ thì miền hội tụ của chuỗi hàm (10) là* $(-1;1)$.

Để chứng minh Định lí 2.2, ta đi chứng minh một số bổ đề sau:

***Bổ đề 2.3.*** *Cho $P_k(x)$ là đa thức bậc $k$ có dạng*

$$P_k(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + \ldots + p_k, \qquad (11)$$

*trong đó, $k \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,k})$. Khi đó*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P_k(x+1)}{P_k(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{P_k(x)}{x^k} = 1. \qquad (12)$$

*Chứng minh.* Sử dụng quy tắc bỏ vô cùng lớn bậc thấp, ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P_k(x+1)}{P_k(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^k}{x^k} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^k = 1.$$

Tương tự, ta cũng thu được đẳng thức thứ 2 của (12).

***Bổ đề 2.4.*** *Cho $P_k(x)$ là đa thức có dạng* (11). *Khi đó, tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho:*

$$P_k(x) > 0,\ \forall x \geq n_0.$$

*Chứng minh.* Nếu $k = 0$ thì

$$P_0(x) = x^0 = 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $k > 0$ thì từ

$$\lim_{x\to+\infty} P_k(x) = +\infty$$

suy ra tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $P_k(x) > 0,\ \forall x \geq n_0.$

***Bổ đề 2.5.*** *Cho $P_k(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức có dạng* (11). *Khi đó, nếu $m > k$ thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho hàm $P_k(x)/Q_m(x)$ giảm với mọi $x \geq n_0$.*

*Chứng minh.* Đặt

$$f(x) = \frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = \frac{x^k + p_1 x^{k-1} + \ldots + p_k}{x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_m}.$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{P_k'(x) Q_m(x) - Q_m'(x) P_k(x)}{Q_m^2(x)} := \frac{A(x)}{Q_m^2(x)}.$$

Do $P_k(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức nên $A(x)$ cũng là một đa thức có hạng tử bậc cao nhất là $(k-m)x^{m+k-1}$. Với $m, k \in \mathbb{N}$ và $m > k$ nên $m + k - 1 \geq 0$. Theo Bổ đề 2.4, thì tồn tại số $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho đa thức

$(k-m)^{-1}A(x)>0,\ \forall x\geq n_1,$ suy ra, $A(x)<0,\ \forall x\geq n_1.$ Chọn $n_0=\max\{S+1,\ n_1\}$, với $S=\{x\in\mathbb{R}:Q_m(x)=0\}.$ Ta có $f'(x)<0,\ \forall x\geq n_0.$ Do đó, hàm $f$ giảm với mọi $x\geq n_0.$

***Bổ đề 2.6 ([1]).*** *Với mọi* $n_0\in\mathbb{Z}_+$, *chuỗi số dương*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \tag{13}$$

*hội tụ khi và chỉ khi* $\alpha>1.$

*Chứng minh Định lí 2.2.* Áp dụng Bổ đề 2.3, ta suy ra bán kính hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa (10) là $R=1.$

Khi $x=R=1,$ ta xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}:=\sum_{n=1}^{\infty}v_n. \tag{14}$$

Theo Bổ đề 2.4 thì tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho chuỗi số

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}v_n \tag{15}$$

là chuỗi số dương. Do đó, ta sẽ khảo sát sự hội tụ của chuỗi số dương (15) bằng cách so sánh với chuỗi số dương (13).

Khi $x=-R=-1,$ ta xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}:=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n v_n. \tag{16}$$

Từ (15), ta suy ra chuỗi số

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n v_n \tag{17}$$

là chuỗi đan dấu.

i. *Nếu* $\alpha>1.$ Theo Bổ đề 2.3, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{1/n^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{n^k}\frac{n^m}{Q_m(n)}=1. \tag{18}$$

Áp dụng tiêu chuẩn so sánh 2 (tiêu chuẩn xét sự hội tụ của chuỗi số dương [4]) và Bổ đề 2.6, ta thu được chuỗi số dương (15) hội tụ. Suy ra, chuỗi số (14) cũng hội tụ.

Mặt khác, ta có

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left|(-1)^n v_n\right|=\sum_{n=n_0}^{\infty}v_n$$

nên chuỗi số (17) hội tụ tuyệt đối. Suy ra, chuỗi số (16) hội tụ.

Như vậy, miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa (10) là $[-1;1].$

ii. *Nếu* $0<\alpha\leq 1.$ Sử dụng tiêu chuẩn so sánh như (i) ta thu được chuỗi số (14) phân kỳ.

Ta xét sự hội tụ của chuỗi số (16). Từ Bổ đề 2.5, ta suy ra tồn tại $n_1\in\mathbb{N}$ sao cho dãy $\{v_n\}$ giảm khi $n\geq n_1$

Mặt khác, sử dụng quy tắc bỏ vô cùng lớn bậc thấp ta có

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^m}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0.$$

Theo tiêu chuẩn Leibnitz, ta suy ra chuỗi đan dấu

$$\sum_{n=n_2}^{\infty}(-1)^n v_n,\quad (n_2=\max\{n_0,n_1\})$$

hội tụ. Từ đó, suy ra chuỗi số (16) hội tụ. Như vậy, miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa (10) là $[-1;1).$

iii. *Nếu* $\alpha\leq 0.$ Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|(\pm1)^n v_n\right|=\begin{cases}1 & \text{khi } \alpha=0,\\ +\infty & \text{khi } \alpha<0.\end{cases}$$

Do đó, $(\pm1)^n v_n\not\to 0$ khi $n\to\infty$ nên theo điều kiện cần ta suy ra các chuỗi số (14), (16) phân kỳ. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa (10) là $(-1;1).$

Định lí 2.2 đã được chứng minh.

***Ví dụ 2.7.*** Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm lũy thừa sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3n}{n^4+6}x^n; \tag{19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^2+n}x^n. \tag{20}$$

Chuỗi hàm (19) là chuỗi hàm với hệ số hữu tỉ có độ lệch bậc $\alpha=2$ nên theo Định lí 2.2, ta suy ra miền hội là $[-1,1].$ Tương tự chuỗi hàm (20) có độ lệch bậc $\alpha=1$ nên suy ra miền hội tụ là $[-1,1).$

***Nhận xét 2.8.*** Qua Ví dụ 2.7, ta nhận thấy rằng việc tìm miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ chỉ là việc xác định độ lệch bậc.

## 3. Quy về chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ

### a. Biến đổi sơ cấp

Không có phương pháp chung để quy một chuỗi hàm về chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ. Tuy nhiên, trong một số trường hợp cụ thể ta có thể biến đổi sơ cấp để quy về chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ và nhờ đó suy ra miền hội tụ một cách nhanh chóng. Sau đây là một số ví dụ minh họa:

***Ví dụ 3.1.*** Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)}{2n^2-3n}x^n; \tag{21}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5n-7}{5^n(n^2+1)}x^n. \tag{22}$$

Chuỗi hàm (21) được viết lại dưới dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^2-3n}(3x)^n. \tag{23}$$

Đặt $X=3x,$ khi đó chuỗi hàm (23) là chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ có độ lệch bậc $\alpha=1.$ Áp dụng Định lý 2.2, ta thu được miền hội tụ của chuỗi hàm (23) theo $X$ là $[-1,1).$ Do đó, ta suy ra miền hội tụ của chuỗi hàm (21) theo $x$ là $\left[-1/3,1/3\right).$

Tương tự, chuỗi hàm (22) được viết lại dưới dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5n-7}{n^2+1}\left(\frac{x}{5}\right)^n. \tag{24}$$

Đặt $X=x/5,$ ta thu được chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ có độ lệch bậc $\alpha=0.$ Theo Định lí 2.2, ta suy miền hội tụ của chuỗi hàm (24) theo $X$ là $(-1,1).$ Như vậy, miền hội tụ của chuỗi hàm (22) theo $x$ là $(-5,5).$

***Ví dụ 3.2.*** Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{(n^3+3)x^n}; \tag{25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6-7n^4+3}{n^5+9n^3-1}x^{2n}. \tag{26}$$

Chuỗi hàm (25) được viết lại dưới dạng

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+3}\left(\frac{-1}{x}\right)^n. \tag{27}$$

Đặt $X=-1/x,$ khi đó (27) là chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ có độ lệch bậc $\alpha=1$ nên suy ra miền hội tụ của chuỗi hàm (27) theo $X$ là $[-1,1).$ Do đó, ta suy ra miền hội tụ của chuỗi hàm (25) theo $x$ là $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty).$

Chuỗi hàm (26) được viết lại dưới dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6-7n^4+3}{n^5+9n^3-1}\left(x^2\right)^n. \tag{28}$$

Đặt $X=x^2\ge 0,$ khi đó (28) là chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ có độ lệch bậc $\alpha=-1.$ Kết hợp với điều kiện $X\ge 0$ ta suy ra miền hội tụ của chuỗi hàm (28) theo $X$ là $[0,1).$ Do đó, ta có miền hội tụ của chuỗi hàm (26) theo $x$ là $(-1,1).$

### b. Trường hợp riêng

Trong chứng minh Định lí 2.2, khi $0<\alpha\le 1,$ nhờ Bổ đề 2.5 ta chỉ ra dãy $\{v_n\}$ là dãy giảm. Đó là một trong hai điều kiện để suy ra chuỗi đan dấu (16) hội tụ. Trong trường hợp tổng quát nếu dãy $\{u_n\}$ thỏa mãn điều kiện (8) thì không suy ra dãy $\{|u_n|\}$ là dãy giảm.

Thật vậy, ta xét chuỗi số sau

$$\sum_{n=2}^{\infty}u_n=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n} \tag{29}$$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{1/\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n\sqrt{n}}{n}=1.$$

Tuy nhiên, dãy $\{|u_n|\}$ không là dãy giảm. Vì nếu ngược lại thì theo tiêu chuẩn Leibnitz chuỗi đan dấu (29) hội tụ, trong khi chuỗi (29) phân kì.

Trong trường hợp riêng $\alpha\notin(0,1]$ thì mệnh đề sau cho ta kết quả tương tự Định lí 2.2.

***Mệnh đề 3.3.*** *Giả sử dãy $\{u_n\}$ thỏa mãn điều kiện (8). Khi đó* *i. Nếu* $\alpha > 1$ *thì miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa (7) là* $[-1,1]$.

*ii. Nếu* $\alpha \le 0$ *thì miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa (7) là* $(-1,1)$.

*Chứng minh.* Từ điều kiện (8), suy ra bán kính hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa (7) bằng với chuỗi hàm lũy thừa (6) và bằng 1. Khi $x = \pm R = \pm 1,$ ta xét sự hội tụ các chuỗi số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n u_n \tag{30}$$

i. Nếu $\alpha > 1$ thì kết hợp giữa (8) và tiêu chuẩn so sánh 2 (tiêu chuẩn xét sự hội tụ của chuỗi số dương [4]), ta suy ra chuỗi số dương

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(\pm 1)^n u_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

hội tụ. Do đó, các chuỗi số (30) là hội tụ tuyệt đối. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa (7) là $[-1,1]$.

ii. Nếu $\alpha \le 0$ thì từ (8), ta có $|u_n| \not\to 0$ khi $n \to \infty.$ Do đó, $(\pm 1)^n u_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$ nên theo điều kiện cần suy ra các chuỗi số (30) phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa (7) là $(-1,1)$.

***Ví dụ 3.4.*** Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n+3}}{n^2+n} x^n; \tag{31}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{2+\sqrt{n}} x^n. \tag{32}$$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n+3}}{n^2+n} : \frac{1}{\sqrt{n^3}} = 2.$$

Theo Mệnh đề 3.3, ta suy ra miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa (31) là $[-1,1]$.

Tương tự, từ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\ln n}{2+\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1,$$

Ta suy ra miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa (32) là $(-1,1)$.

***Nhận xét 3.5.*** Trong Ví dụ 3.4, nếu áp dụng quy tắc bỏ vô cùng lớn bậc thấp thì ta có thể xem chuỗi hàm (31), (32) như là các chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ có độ lệch bậc tương ứng là $\alpha = 3/2,$ $\alpha = -1/2.$

## 4. Kết luận

Bài báo đã phát triển ý tưởng chọn hàm lũy thừa để làm đại lượng trung gian trong việc so sánh các đại lượng vô cùng bé trong [5] bằng việc chọn chuỗi hàm lũy thừa (6) làm chuỗi hàm trung gian trong việc tìm miền hội tụ của chuỗi hàm. Bài báo đã đưa ra một cách tiếp cận mới khi tìm miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa đó là so sánh với chuỗi hàm trung gian (6). Nhờ đó, mà miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ được xác định thông qua việc tìm độ lệch bậc $\alpha.$ Bên cạnh đó bài báo cũng đã đưa ra phương pháp quy một chuỗi hàm lũy thừa về chuỗi hàm lũy thừa với hệ số hữu tỉ. Qua đó, tìm ra miền hội tụ của nó một cách nhanh chóng.

Trong bài báo này chúng tôi chưa đưa ra kết quả cho các chuỗi hàm thỏa mãn điều kiện (8) với $\alpha \in (0,1].$ Đây là một vấn đề mở mà chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu trong thời gian đến.

## Tài liệu tham khảo

[1] B. D. Demidovic (1975). *Bài tập giải tích toán học*. Tập 1, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp.

[2] Đ. C. Khanh (2000). *Giải tích một biến*. NXB ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

[3] N. Đ. Trí, T. V. Đĩnh và N. H. Quỳnh (2008). *Bài tập toán cao cấp*. Tập 2, NXB Giáo dục.

[4] V. Tuấn (2011), *Giáo trình giải tích toán học*. Tập 2, NXB Giáo dục Việt Nam.

[5] Phan Đức Tuấn và Nguyễn Thị Thu Thủy (2017). Ứng dụng vô cùng bé tương đương tính giới hạn hàm số. *Tạp chí Khoa học và Giáo dục, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*, 22(01), 26-30.

# CONVERGENCE DOMAINS OF POWER SERIES WITH RATIONAL COEFFICIENTS

**Abstract**: The Taylor's expansion enables us to expand an infinitely differentiable function into a power series. The opposite problem is the summation of a power series. Before calculating the sum of a power series, we need to find its domain of convergence because only on that domain does the sum of the series exist. This leads to the problem of finding the radius of convergence of the power series.

We know that if $u_n : av_n$ when $n$ tends to infinity, two power series with coefficients $u_n, v_n$ will have the same radius of convergence. This allows us to identify which types of power series have the same radius of convergence by comparing their coefficients as $n$ tends to infinity. In [5], the authors chose the power function $ax^{\alpha}$ as an intermediary in comparing the extremely small quantities when $x$ tends to result in zero. In this article, we choose the coefficient $u_n = 1/n^{\alpha}$ as a standard to determine the types of power series that have the same radius of convergence with the series with factor $u_n$. Then we go on to indicate that in this class, the power series with rational coefficients have the same domain of convergence with the power series with factor $u_n$.

**Key words:** series; power series; radius of convergence; domain of convergence; comparison tests; Taylor's expansion.