UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

PHƯƠNG PHÁP NEWTON SUY RỘNG CHO PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG LIÊN TỤC MỘT BIẾN

Nhận bài:
23 – 07 – 2017
Chấp nhận đăng:
25 – 09 – 2017
http://jshe.ued.udn.vn/

Phạm Quý Mười[a*], Đỗ Viết Lân[a], Dương Xuân Hiệp[a], Phan Đức Tuấn[a] và Phan Quang Như Anh[a]

Tóm tắt: Trong bài báo này chúng tôi đề xuất phương pháp Newton suy rộng để tìm nghiệm cho phương trình không liên tục. Ở đây, chúng tôi chỉ trình bày phương pháp cho phương trình không liên tục trong không gian một chiều $\mathbb{R}$. Trước hết, chúng tôi đề xuất các hàm nửa trơn xấp xỉ cho các hàm không trơn tương ứng. Sau đó chúng tôi chứng minh một số tính chất cơ bản, cần thiết cho việc chứng minh sự hội tụ phương pháp Newton suy rộng. Tiếp theo, chúng tôi trình bày và chứng minh sự hội tụ của phương pháp Newton suy rộng cho phương trình không liên tục được nghiên trong bài báo này. Cuối cùng, chúng tôi trình bày các kết quả nghiệm số cho một vài ví dụ cụ thể. Các ví dụ số chỉ ra rằng phương pháp Newton suy rộng có tốc độ hội tụ nhanh như phương pháp Newton cổ điển.

Từ khóa: phương pháp Newton suy rộng; phương trình không liên tục; đạo hàm Newton; xấp xỉ nửa trơn; nghiệm của phương trình không liên tục.

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu phương trình không trơn trong [1, 2]:

$$x = H_{\frac{2\alpha}{s}}\left(x - \frac{1}{s} f'(x)\right) \qquad (1)$$

hay

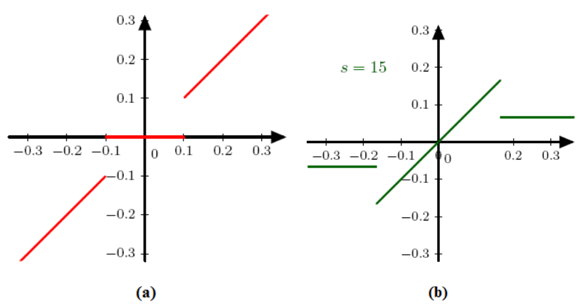
$$F(x) := x - H_{\frac{2\alpha}{s}}\left(x - \frac{1}{s} f'(x)\right) = 0, \qquad (2)$$

trong đó $H_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi:

$$H_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & |x| < \sqrt{\lambda}, \\ x, & |x| \ge \sqrt{\lambda}. \end{cases}$$

Ở đây, $s > 0$ là một số thực cho trước và $f \in C^1(\mathbb{R})$, tức là f là một hàm khả vi liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chú ý rằng các hàm H_λ và F không liên tục trên $\mathbb{R}$ vì hàm H_λ không liên tục tại $x = \pm\sqrt{\lambda}$ (xem Hình 1). Vì thế các phương pháp số thông thường như phương pháp dây cung, phương pháp Newton, tựa Newton,... không thể áp dụng được [3, 4, 5, 6].



Hình 1. *(a) Đồ thị hàm $H_\lambda(x)$, (b) $F(x)$ với $\lambda = 0.01$*

Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một phương pháp mới để tìm nghiệm cho phương trình (2) như sau:

- Trước hết, các hàm H_λ và F (không liên tục, không khả vi) được xấp xỉ bởi các hàm số P_λ^ε và F_ε tương ứng.

- Sau đó, chúng ta thực hiện vòng lặp: Chọn dãy $\{\varepsilon_n\} \downarrow 0, x_0 \in \mathbb{R}$ và tính

[a]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*
*** Liên hệ tác giả**
Phạm Quý Mười
Email: pqmuoi@ued.udn.vn

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{F'_{\varepsilon_n}(x_n)}.F_{\varepsilon_n}(x_n) \qquad (3)$$

Chú ý rằng, nếu F là hàm liên tục Lipschitz thì (3) chính là vòng lặp Newton trơn hóa [3, 4, 5, 6]. Ở đây, hàm số F được cho ở (2) là hàm không liên tục nên kết quả của chúng tôi là mới và là một sự mở rộng của các kết quả trong [3, 4, 5, 6].

Đóng góp chính của bài báo là đưa ra điều kiện cho dãy $\{\varepsilon_n\}$ và chứng minh sự hội tụ địa phương của vòng lặp (3) cho phương trình (2) và xem xét một vài ví dụ số cụ thể minh họa cho phương pháp.

Bố cục của bài báo như sau: Trong phần hai, chúng tôi đề xuất các hàm trơn, tương ứng là xấp xỉ của các hàm không trơn H_λ và F. Sau đó, chứng minh một vài tính chất của các hàm xấp xỉ này. Những tính chất này là cần thiết cho việc chứng minh sự hội tụ của phương pháp Newton suy rộng được trình bày ở phần tiếp theo. Phần ba, chúng tôi trình bày phương pháp Newton suy rộng cho phương trình (3) và chứng minh sự hội tụ của nó. Cuối cùng, chúng tôi trình bày các kết quả số cho một số ví dụ cụ thể.

2.Xấp xỉ nửa trơn cho hàm không trơn

Trước hết, chúng ta trình bày một tính chất quan trọng cho nghiệm x^* của phương trình (2). Tính chất này được phát biểu trong bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. *Cho* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *và* $s > 0$. *Với mỗi* $x^* \in \mathbb{R}$ *nếu* $F(x^*) = 0$ *thì một trong hai trường hợp sau xảy ra:*

(1) $x^* = 0$.

(2) $|x^*| \geq \sqrt{\frac{2\alpha}{s}}$.

Chứng minh. Giả sử $|x^*| < \sqrt{\frac{2\alpha}{s}}$. Ta sẽ chứng minh $x^* = 0$. Thật vậy, từ $F(x^*) = 0$ ta có

$$\left| H_{\frac{2\alpha}{s}}\left(x^* - \frac{1}{s} f'(x^*) \right) \right| = |x^*| < \sqrt{\frac{2\alpha}{s}}.$$

Giả sử rằng $\left| x^* - \frac{1}{s} f'(x^*) \right| \geq \sqrt{\frac{2\alpha}{s}}$. Khi đó

$$\left| H_{\frac{2\alpha}{s}}\left(x^* - \frac{1}{s} f'(x^*) \right) \right| = \left| x^* - \frac{1}{s} f'(x^*) \right| \geq \sqrt{\frac{2\alpha}{s}}.$$

Mâu thuẫn này cho ta $\left| x^* - \frac{1}{s} f'(x^*) \right| < \sqrt{\frac{2\alpha}{s}}$.

Lúc này

$$x^* = H_{\frac{2\alpha}{s}}\left(x^* - \frac{1}{s} f'(x^*) \right) = 0.$$

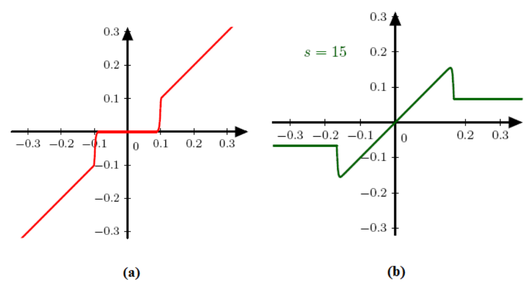
Tiếp theo chúng tôi đưa ra một phương pháp xấp xỉ các hàm số không liên tục H_λ và F bởi các hàm số P_λ^ε và F_ε là các hàm số liên tục và khả vi Newton (xem Hình 2).

Thật vậy, ta định nghĩa các hàm số P_λ^ε và F_ε như sau

$$P_\lambda^\varepsilon(x) = x.e^{-\frac{\max\{0;\lambda - x^2\}}{\varepsilon}} = \begin{cases} G_\lambda^\varepsilon(x), & |x| < \sqrt{\lambda} \\ x, & |x| \geq \sqrt{\lambda} \end{cases},$$

$$F_\varepsilon(x) = x - P_{\frac{2\alpha}{s}}^\varepsilon\left(x - \frac{1}{s} f'(x) \right),$$

trong đó $G_\lambda^\varepsilon(x) = x.e^{-\frac{\lambda - x^2}{\varepsilon}}$.



Hình 2. *(a) Đồ thị hàm* $P_\lambda^\varepsilon(x)$ *và (b) Đồ thị hàm* $F_\varepsilon(x)$ *với* $\lambda = 0.01$, $\varepsilon = 0,0005$ *và* $f(x) = |x|$

Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ chỉ ra rằng các hàm P_λ^ε và F_ε là các hàm nửa trơn. Để thuận tiện cho người đọc, chúng tôi nhắc lại khái niệm hàm nửa trơn ở đây.

Định nghĩa 2.1. Cho U là một tập mở của $D \subset \mathbb{R}$ và f là một ánh xạ xác định trên D. Ánh xạ

$f: U \to \mathbb{R}$ được gọi là khả vi Newton tại $x \in U$ nếu tồn tại ánh xạ $F: U \to \mathrm{L}(D, \mathbb{R})$ sao cho

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - F(x+h)h|}{|h|} = 0 \qquad (4)$$

trong đó $\mathrm{L}(D, \mathbb{R})$ là tập các phiếm hàm tuyến tính liên tục từ D vào $\mathbb{R}$.

Khi đó F được gọi là một đạo hàm Newton của f tại x.

Định nghĩa 2.2. Cho U là một tập con mở của $D \subset \mathbb{R}$ và f là một ánh xạ xác định trên D. Ánh xạ $f: U \to \mathbb{R}$ được gọi là khả vi Newton trên U nếu tồn tại ánh xạ $F: U \to \mathrm{L}(D, \mathbb{R})$ sao cho với mỗi $x \in U$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - F(x+h)h|}{|h|} = 0. \qquad (5)$$

Khi đó hàm số f được gọi là hàm Newton nửa trơn và F được gọi là một đạo hàm Newton của f trên U.

Bổ đề 2.2. *Với $\varepsilon > 0$ và $f \in C^2(\mathbb{R})$ ta có:*

(1) $P_\lambda^\varepsilon(x)$ và $F_\varepsilon(x)$ là các hàm số liên tục và khả vi Newton trên $\mathbb{R}$ với các đạo hàm Newton tương ứng là

$$\left(P_\lambda^\varepsilon(x)\right)' = \begin{cases} (G_\lambda^\varepsilon(x))', & |x| < \sqrt{\lambda} \\ 1, & |x| \ge \sqrt{\lambda} \end{cases}, \qquad (6)$$

$$\left(F_\varepsilon(x)\right)' = \begin{cases} 1 - X_s'(x)(G_\lambda^\varepsilon(X_s))', & |X_s| < \sqrt{\dfrac{2\alpha}{s}} \\ \dfrac{1}{s} f''(x), & |X_s| \ge \sqrt{\dfrac{2\alpha}{s}} \end{cases}. \qquad (7)$$

ở đây $(G_\lambda^\varepsilon(x))' = e^{-\frac{\lambda - x^2}{\varepsilon}}\left(1 + \dfrac{2x^2}{\varepsilon}\right)$ *là đạo hàm của hàm số* G_λ^ε *và* $X_s = X_s(x) = x - \dfrac{1}{s} f'(x)$.

(2) Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} P_\lambda^\varepsilon(x) = H_\lambda(x),$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F_\varepsilon(x) = F(x).$$

Chứng minh. (1) Với mỗi $x_0 \in \mathbb{R}$ ta có các trường hợp sau:

+ Nếu $|x_0| > \sqrt{\lambda}$ thì với mọi $h \neq 0$ đủ bé, ta có $|x_0 + h| > \sqrt{\lambda}$. Khi đó

$$\left|P_\lambda^\varepsilon(x_0+h) - P_\lambda^\varepsilon(x_0) - (P_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h\right|$$
$$= |x_0 + h - x_0 - 1.h| = 0.$$

Do đó

$$\frac{|P_\lambda^\varepsilon(x_0+h) - P_\lambda^\varepsilon(x_0) - (P_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h|}{|h|} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

+ Nếu $|x_0| < \sqrt{\lambda}$ thì với mọi $h \neq 0$ đủ bé, ta có $|x_0 + h| < \sqrt{\lambda}$. Khi đó

$$\left|P_\lambda^\varepsilon(x_0+h) - P_\lambda^\varepsilon(x_0) - (P_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h\right|$$
$$= \left|G_\lambda^\varepsilon(x_0+h) - G_\lambda^\varepsilon(x_0) - (G_\lambda^\varepsilon(x_0))'.h \right.$$
$$\left. + (G_\lambda^\varepsilon(x_0))'.h - (G_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h\right|$$
$$\le \left|G_\lambda^\varepsilon(x_0+h) - G_\lambda^\varepsilon(x_0) - (G_\lambda^\varepsilon(x_0))'h\right|$$
$$+ \left|(G_\lambda^\varepsilon(x_0))'h - (G_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h\right|.$$

Vì $G_\lambda^\varepsilon(.)$ khả vi liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left|G_\lambda^\varepsilon(x_0+h) - G_\lambda^\varepsilon(x_0) - (G_\lambda^\varepsilon(x_0))'.h\right|}{|h|} = 0,$$

và

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left|(G_\lambda^\varepsilon(x_0))'.h - (G_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h\right|}{|h|}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left|(G_\lambda^\varepsilon(x_0))'.h - (G_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h\right| = 0.$$

Từ đó, suy ra

$$\lim_{h\to 0} \frac{|P_\lambda^\varepsilon(x_0+h) - P_\lambda^\varepsilon(x_0) - (P_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h|}{|h|} = 0.$$

+ Nếu $|x_0| = \sqrt{\lambda}$ tì ta xét các giới hạn một phía.

Khi $h \to 0^+$ và $|x_0 + h| < \sqrt{\lambda}$ thì

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|P_\lambda^\varepsilon(x_0+h) - P_\lambda^\varepsilon(x_0) - (P_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h|}{|h|}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{|G_\lambda^\varepsilon(x_0+h) - G_\lambda^\varepsilon(x_0) - (G_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h|}{|h|}$$
$$= 0.$$

Khi $h \to 0^+$ và $|x_0 + h| > \sqrt{\lambda}$ thì

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|P_\lambda^\varepsilon(x_0+h) - P_\lambda^\varepsilon(x_0) - (P_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h|}{|h|}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{|x_0 + h - x_0 - h|}{|h|} = 0.$$

Tương tự ta cũng chứng minh được

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|P_\lambda^\varepsilon(x_0+h) - P_\lambda^\varepsilon(x_0) - (P_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h|}{|h|} = 0.$$

Như vậy ta có

$$\lim_{h\to 0} \frac{|P_\lambda^\varepsilon(x_0+h) - P_\lambda^\varepsilon(x_0) - (P_\lambda^\varepsilon(x_0+h))'.h|}{|h|} = 0.$$

Vậy $P_\lambda^\varepsilon(x)$ khả vi Newton và $(P_\lambda^\varepsilon(x))'$ được cho bởi (6). Theo công thức đạo hàm Newton của hàm hợp [3], ta có:

$$F_\varepsilon'(x) = 1 - \left(x - \frac{1}{s} f'(x)\right)' \left(P_\lambda^\varepsilon\left(x - \frac{1}{s} f'(x)\right)\right)'$$

Áp dụng kết quả (6) ta có ngay kết quả cần chứng minh.

(2) Nếu $|x| \geq \sqrt{\lambda}$ thì $P_\lambda^\varepsilon(x) = x = H_\lambda(x)$.

Nếu $|x| < \sqrt{\lambda}$ thì $P_\lambda^\varepsilon(x) = G_\lambda^\varepsilon(x)$.

Vì $\lambda - x^2 > 0$ nên khi $\varepsilon \to 0^+$ thì $G_\lambda^\varepsilon(x) \to 0$.

Như vậy ta có $\lim_{\varepsilon\to 0^+} P_\lambda^\varepsilon(x) = H_\lambda(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ kết quả trên ta có

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[x - P_{\frac{2\alpha}{s}}^\varepsilon\left(x - \frac{1}{s} f'(x)\right)\right]$$

$$= x - H_{\frac{2\alpha}{s}}\left(x - \frac{1}{s} f'(x)\right).$$

Vậy $\lim_{\varepsilon\to 0^+} F_\varepsilon(x) = F(x)$.

Bổ đề 2.3. *Nếu* $0 < A \leq f''(x) \leq B, \forall x \in \mathrm{U}$ *thì* $\exists \varepsilon_0 > 0$ *sao cho* $\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ *ta luôn có* $0 < m_1 \leq |F_\varepsilon'(x)| \leq m_2$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.2, ta có

$$\left(F_\varepsilon(x)\right)' = \begin{cases} 1 - X_s'(x)(G_\lambda^\varepsilon(X_s))', & |X_s| < \sqrt{\dfrac{2\alpha}{s}}, \\ \dfrac{1}{s} f''(x), & |X_s| \geq \sqrt{\dfrac{2\alpha}{s}}. \end{cases}$$

Nếu $|X_s(x)| \geq \sqrt{\dfrac{2\alpha}{s}}$ thì $\left(F_\varepsilon(x)\right)' = \dfrac{1}{s} f''(x)$. Do đó $0 < \dfrac{A}{s} \leq \left(F_\varepsilon(x)\right)' \leq \dfrac{B}{s}$

Nếu $|X_s(x)| < \sqrt{\dfrac{2\alpha}{s}}$ thì $\left(F_\varepsilon(x)\right)' = 1 - X_s'(x) M$,

trong đó, M được định nghĩa bởi:

$$M = e^{\frac{(X_s(x))^2 - \frac{2\alpha}{s}}{\varepsilon}}\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}.\left(X_s(x)\right)^2\right).$$ và

$\lim_{\varepsilon\to 0} M = 0$. Hơn nữa $X_s'(x) = 1 - \dfrac{1}{s} f''(x)$ bị chặn nên $\exists \varepsilon_0 > 0$ sao cho $\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ ta có:

$$0 < 1 \leq \left(F_\varepsilon(x)\right)' \leq 2$$

Đặt $m_1 = \min\left\{1; \dfrac{A}{s}\right\}$ và $m_2 = \max\left\{2; \dfrac{B}{s}\right\}$ ta luôn có $0 < m_1 \leq |F_\varepsilon'(x)| \leq m_2$

Bổ đề 2.4. *Cho* x^* *là một nghiệm của phương trình (2). Khi đó* $\exists r > 0$ *sao cho* $\forall x \in B(x^*, r)$ *và* $\forall \varepsilon > 0$ *ta luôn có*

$$|F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(x^*) - F_\varepsilon'(x).(x - x^*)| < \frac{m_1 |x - x^*|}{4}.$$

Chứng minh. $\forall \varepsilon > 0$ vì $F_\varepsilon'(x^*)$ là đạo hàm của F_ε tại x^* nên

$$\lim_{h\to 0} \frac{|F_\varepsilon(x^*+h) - F_\varepsilon(x^*) - F_\varepsilon'(x^*+h).h|}{|h|} = 0$$

Từ đó suy ra $\exists r > 0$ sao cho $\forall h \in B(0; r) \setminus \{0\}$, ta có

$$\frac{|F_\varepsilon(x^*+h) - F_\varepsilon(x^*) - F_\varepsilon'(x^*+h).h|}{|h|} < \frac{m_1}{4}.$$

Đặt $x = x^* + h$ ta có $x \in B(x^*, r)$ và

$$|F_\varepsilon(x)-F_\varepsilon(x^*)-F'_\varepsilon(x).(x-x^*)|<\frac{m_1|x-x^*|}{4}.$$

Bổ đề 2.5. *Cho x^* là một nghiệm của phương trình (2). Ta có*

$$\left|F_\varepsilon(x^*)-F(x^*)\right|\le c.\varepsilon, \forall\varepsilon>0.$$

Chứng minh. Ta có $F(x^*)=0$ nên

$$F_\varepsilon(x^*)-F(x^*)=F_\varepsilon(x^*)$$

$$=x^*-X\left(x^*\right).e^{-\frac{\max\left\{0;\frac{2\alpha}{s}-X^2\left(x^*\right)\right\}}{\varepsilon}}$$

+ Nếu $x^*=0$ thì $H_{\frac{2\alpha}{s}}\left(-\frac{1}{s}f'(0)\right)=0$. Suy ra

$$\left|-\frac{1}{s}f'(0)\right|<\sqrt{\frac{2\alpha}{s}}$$

và $\left|X_s(0)\right|=\left|-\frac{1}{s}f'(0)\right|<\sqrt{\frac{2\alpha}{s}}.$

Do đó

$$\left|F_\varepsilon(0)-F(0)\right|=\left|-X_s\left(0\right).e^{\frac{X_s^2(0)-\frac{2\alpha}{s}}{\varepsilon}}\right|$$

$$<\left|X_s\left(0\right)\right|\frac{\varepsilon}{\frac{2\alpha}{s}-X_s^2(0)}=c\varepsilon.$$

+ Nếu $|x^*|\ge\sqrt{\frac{2\alpha}{s}}$ thì

$$H_{\frac{2\alpha}{s}}\left(x^*-\frac{1}{s}f'(x^*)\right)=x^*\ne 0.$$

Do đó $x^*=H_{\frac{2\alpha}{s}}\left(x^*-\frac{1}{s}f'(x^*)\right)=x^*-\frac{1}{s}f'(x^*).$

Đẳng thức này chỉ xảy ra khi $f'(x^*)=0$. Điều này suy ra rằng

$$F_\varepsilon(x^*)-F(x^*)=0-0=0, \forall\varepsilon>0.$$

Vậy $|F_\varepsilon(x^*)-F(x^*)|\le c.\varepsilon, \forall\varepsilon>0.$

3. Phương pháp Newton suy rộng

Như đã trình bày ở phần đặt vấn đề, phương pháp Newton suy rộng cho phương trình (2) như sau:

1. Chọn $x_0\in ¡$ và ε_n sao cho $0<\varepsilon_0\le\frac{m}{4c}|x_0-x^*|$.

2. Thực hiện bước lặp:

2.1 Tính $x_{n+1}=x_n-\frac{1}{F'_{\varepsilon_n}(x_n)}.F_{\varepsilon_n}(x_n)$

2.2 Chọn ε_{n+1} sao cho

$$0<\varepsilon_{n+1}\le\frac{m_1}{4c}|x_{n+1}-x^*|, \qquad (8)$$

trong đó m_1 là hằng số được xác định trong Bổ đề 2.3.

Sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$ được đưa ra ở định lí sau:

Định lí 3.1. *Cho x^* là một nghiệm của phương trình (2), $x_0\in ¡$ là một số thực tùy ý, và dãy (x_n) định nghĩa bởi vòng lặp* $x_{n+1}=x_n-\frac{1}{F'_{\varepsilon_n}(x_n)}.F_{\varepsilon_n}(x_n), \forall n=0,1,\ldots.$

Nếu x_0 đủ gần x^* và dãy $\{\varepsilon_n\}$ thỏa mãn

$$0<\varepsilon_n\le\frac{m_1}{4c}|x_n-x^*|, \forall n=0,1,\ldots.$$

thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x^* với tốc độ tuyến tính.

Chứng minh. Giả sử x_0 đủ gần x^* để Bổ đề 2.3 đúng. Khi đó, ta có:

$$\left|x_{n+1}-x^*\right|=\left|x_n-\frac{1}{F'_{\varepsilon_n}(x_n)}.F_{\varepsilon_n}(x_n)-x^*\right|$$

$$=\left|\frac{1}{F'_{\varepsilon_n}(x_n)}\right|.\left|F'_{\varepsilon_n}(x_n)(x_n-x^*)-F_{\varepsilon_n}(x_n)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{F'_{\varepsilon_n}(x_n)}\right|.\left|F'_{\varepsilon_n}(x_n)(x_n-x^*)-F_{\varepsilon_n}(x_n)+F_{\varepsilon_n}(x^*)\right.$$

$$\left.-F_{\varepsilon_n}(x^*)+F(x^*)\right|$$

$$\le\left|\frac{1}{F'_{\varepsilon_n}(x_n)}\right|.\left|F_{\varepsilon_n}(x_n)-F_{\varepsilon_n}(x^*)-F'_{\varepsilon_n}(x_n)(x_n-x^*)\right|$$

$$+\left|\frac{1}{F'_{\varepsilon_n}(x_n)}\right|.\left|F(x^*)-F_{\varepsilon_n}(x^*)\right|$$

$$< \frac{1}{m_1}.\frac{m_1\left|x_n-x^*\right|}{4}+\frac{c}{m_1}\varepsilon_n.$$

Vì $0<\varepsilon_n\le\frac{m_1}{4c}\left|x_n-x^*\right|$ với mọi $n\in¥$, ta suy ra $\left|x_{n+1}-x^*\right|<\frac{1}{2}\left|x_n-x^*\right|$ với mọi $n\in ¥$. Bằng phương pháp quy nạp, ta có $\left|x_n-x^*\right|<\frac{1}{2^n}\left|x_0-x^*\right|$. Điều này suy ra rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x^* với tốc độ tuyến tính.

Chú ý 3.1. Điều kiện (8) chỉ mang tính lí thuyết. Trong thực tế, nghiệm chính xác là giá trị mà chúng ta muốn tìm nên không được biết.

Trong thực hành, chúng ta có thể chọn một dãy không âm tùy ý $\{\varepsilon_n\}$ sao cho tốc độ tiến tới không của dãy này nhanh hơn tốc độ tuyến tính (chẳng hạn hội tụ bậc đa thức hoặc bậc mũ) và giá trị ban đầu ε_0 đủ bé.

4. Một vài ví dụ số về phương pháp Newton suy rộng

Ví dụ 4.1. Cho

$$f(x)=x^2;\alpha=0,5;s=100;ò_n=\frac{1}{100^n}.$$

Thực hiện bước lặp $x_{n+1}=x_n-\frac{F_{ò_n}(x_n)}{F'_{ò_n}(x_n)}$.

Sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$ được thể hiện ở Bảng 1. Dễ thấy nghiệm đúng ở đây là $x^*=0$, và dù ta lấy $x_0=20$ khá xa x^* thì cũng chỉ sau 3 bước lặp x_n đã hội tụ về x^*.

Bảng 1: Các bước trong vòng lặp Newton nửa trơn suy rộng
cho Ví dụ 4.1 với ε_n=1/〖100〗^n , f(x)=x^2, α=1/2, s=100

n	x_n	F	F'
0	20	0.4	0.02
1	7.10543E-14	4.54377E-14	0.639478148
2	0	0	1
3	0	0	1
4	0	0	1

Ví dụ 4.2. Cho $f(x)=x^4-8x^2+4$; $\alpha=0,01$; $s=10$; $ò_n=\frac{1}{100^n}$.

Thực hiện bước lặp $x_{n+1}=x_n-\frac{F_{ò_n}(x_n)}{F'_{ò_n}(x_n)}$.

Sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$ được thể hiện ở Bảng 2. Dễ thấy nghiệm đúng ở đây là $x^*=2$ và $x^*=-2$, khi ta lấy x_0 gần với nghiệm nào thì x_n sẽ hội tụ về nghiệm đó.

Nếu lấy $x_0=3$ thì $x_n\to 2$

Nếu lấy $x_0=-4$ thì $x_n\to -2$

Bảng 2: Các bước trong vòng lặp Newton nửa trơn suy rộng
cho Ví dụ 4.2 với ε_n=1/〖100〗^n , f(x)=x^4-8x^2+4, α=0,01, s=10

n	x_n	F	F'
0	3	6	9.2
1	2.347826087	1.420235062	5.014744802
2	2.064614255	0.216893527	3.515158426
3	2.002911908	0.009338464	3.213987331
4	2.000006338	2.02813E-05	3.200030422
5	2	9.64038E-11	3.2
6	2	0	3.2
7	2	0	3.2
8	2	0	3.2

Bảng 3: Các bước trong vòng lặp Newton nửa trơn suy rộng
cho Ví dụ 4.2 với ε_n=1/〖100〗^n , f(x)=x^4-8x^2+4, α=0,01, s=10

n	x_n	F	F'
0	-4	-19.2	17.6
1	-2.909090909	-5.193087904	8.555371901
2	-2.302093579	-1.196752413	4.759561814
3	-2.050651858	-0.168295392	3.446207651
4	-2.001816904	-0.005822018	3.2087251
5	-2.000002471	-7.90599E-06	3.200011859
6	-2	-1.46496E-11	3.2
7	-2	0	3.2
8	-2	0	3.2

5. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu bài toán tìm nghiệm của phương trình không liên tục một biến, Phương trình (1), xuất hiện trong các bài toán chỉnh hóa cho bài toán ngược. Chúng tôi đã đề xuất một họ các hàm khả vi Newton, xấp xỉ cho hàm không trơn trong Phương trình (1) và nghiên cứu một số tính chất cơ bản của họ hàm này. Trên cơ sở đó, chúng tôi đề xuất phương pháp Newton suy rộng cho Phương trình (1) và chứng minh sự hội tụ địa phương của phương pháp này. Các ví dụ số đã chỉ ra, phương pháp Newton suy rộng rất hiệu quả, có tốc độ hội tụ nhanh như phương pháp Newton cổ điển cho phương trình trơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Thomas Blumensath and Mike E Davies (2008). Iterative thresholding for sparse approximations. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 14(5-6), 629-654.

[2] Thomas Blumensath, Mehrdad Yaghoobi, and Mike E Davies (2007). Iterative hard thresholding and l_0 regularisation. *IEEE International Conference on Acoustics. Speech and Signal Processing-ICASSP'07*, 3: III-877. IEEE.

[3] Pham Quy Muoi, Dinh Nho Hao, Peter Maass, and Michael Pidcock (2013). Semismooth newton and quasinewton methods in weighted r_1 -regularization. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 21(5), pp.665-693.

[4] Xiaojun Chen, Zuhair Nashed, and Liqun Qi (2000). Smoothing methods and Semismooth methods for nondifferentiable operator equations. *SIAM Journal Numerical Analysis*. 38(5), 1200-1216.

[5] M. HinterMuller, K. Ito, and K. Kunish (2003). The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method. *SIAM Journal on Optimization*. 13(3), 865-888.

[6] M. HinterMuller (2010). Semismooth Newton Method and Applications. *Oberwolfach-Seminar on Mathematics of PDE-Constrained Optimization*, November.

GENERALIZED NEWTON METHOD FOR NON-CONTINUOUS ONE-VARIABLE EQUATIONS

Abstract: In this article, we put forward a generalized Newton method to find out the root of a non-continuous equation. Here we only present this method for discontinuous equations in a one-way space. First of all, we propose approximate semi-smooth functions for corresponding non-smooth functions. Then, we prove some basic properties that are necessary for the testification of the convergence of the generalized Newton method. After that, we prove the convergence of this method in non-continuous equations under study. Finally, we present the root findings for a number of specific examples. The numerical examples show that the convergence speed of the generalized Newton method is as fast as that of the traditional Newton method.

Key words: generalized Newton method; non-continuous equation; Newton derivative; semi-smooth approximation; root of a non-continuous equation.