UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

Nhận bài:
09 – 02 – 2017
Chấp nhận đăng:
28 – 06 – 2017
http://jshe.ued.udn.vn/

SỰ TỒN TẠI CỦA PHỨC ĐƠN HÌNH CÓ CÁC NHÓM ĐỒNG ĐIỀU ĐẲNG CẤU VỚI CÁC NHÓM ABEL HỮU HẠN SINH CHO TRƯỚC

Lương Quốc Tuyển[a*], Lê Thị Thu Nguyệt[a]

Tóm tắt: Trong Ví dụ 2.40 trong [1], với mỗi nhóm cyclic hữu hạn, người ta đã tìm được một CW phứcsao cho nhóm đồng điều *p*-chiều là đẳng cấu với nó (không gian Moore). Để tính toán các nhóm đồng điều của CW phức này, người ta đã sử dụng đồng điều của CW phức và bậc của một ánh xạ từ mặt cầu S^n lên chính nó. Nhưng chúng ta không biết không gian Moore có là phức đơn hình hay không. Mục đích của chúng tôi là tìm một phức đơn hình sao cho các nhóm đồng điều của nólà các nhóm Abel hữu hạn sinh cho trước, ở đây chúng tôi tính toán trực tiếp nhóm đồng điều 1-chiều của phức đơn hình này. Đầu tiên, với mỗi nhóm cyclic hữu hạn chúng tôi xây dựng một phức đơn hình và sử dụng phương pháp tương tự trong [2] (§78) để tính toán nhóm đồng điều 1-chiều của nó. Nhóm này đẳng cấu với nhóm cyclic hữu hạn cho trước. Sau đó, chúng tôi xây dựng phức đơn hình khác và tính toán nhóm đồng điều *p*-chiều của nó dựa vào dãy Mayer - Vietoris trong [3](§25).

Từ khóa: CW phức; phức đơn hình; nhóm cyclic; nhóm đồng điều; không gian Moore.

1. Giới thiệu

Ta biết rằng, mỗi nhóm cyclic hữu hạn, tồn tại một CW phức sao cho nhóm đồng điều *p*-chiều là đẳng cấu với nó (xem Ví dụ 2.40 trong[1]). Để tính toán các nhóm đồng điều của CW phức này, người ta đã sử dụng đồng điều của CW phức và bậc của một ánh xạ từ mặt cầu S^n lên chính nó. Nhưng chúng ta không biết không gian Moore có là phức đơn hình hay không. Mục đích của chúng tôi là tìm một phức đơn hình sao cho nhóm đồng điều 2-chiều là một nhóm cyclic hữu hạn. Ở đây chúng tôi tính toán trực tiếp nhóm đồng điều 2-chiều của phức đơn hình này.

2. Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết

Giả sử $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ là hệ độc lập Affine trong $\mathbb{R}^N$. Khi đó,

$$\sigma = \left\{ x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i : t_0, t_1, ..., t_n \geq 0, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$$

được gọi là *một đơn hình n-chiều sinh bởi* $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$.

Giả sử $K \subset \mathbb{R}^N$. Khi đó, một *phức đơn hình* trong K là họ gồm các đơn hình trong $\mathbb{R}^N$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) Nếu $\sigma \in K, \delta \prec \sigma$, thì $\delta \in K$.

(2) Nếu $\sigma, \delta \in K$, thì hoặc $\sigma \cap \delta = \varnothing$ hoặc $\sigma \cap \delta$ là một mặt chung của các đơn hình σ, δ.

Giả sử K là một phức đơn hình, A_p là tập tất cả các *p*-đơn hình định hướng trên K. Khi đó, nếu A_p khác rỗng, thì mỗi *p-xích* trên K là một hàm từ tập A_p vào $\mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $-c(\sigma) = c(\sigma')$ nếu $\sigma, \sigma' \in A_p$ đối diện nhau.

[a]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*
*** Liên hệ tác giả**
Lương Quốc Tuyển
Email: lqtuyen@ued.udn.vn

(2) Tồn tại tập A'_p là tập con hữu hạn của A_p sao cho:

$$c(\sigma) = 0 \text{ với mọi } \sigma \in A_p \setminus A'_p.$$

Kí hiệu $C_p(K)$ là tập tất cả các *p*-xích. Khi đó, $C_p(K)$ là nhóm Abel và được gọi là *nhóm các p-xích*.

Hạt nhân của đồng cấu

$$\partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$$

được gọi là *nhóm các p-chu trình* và được kí hiệu là $Z_p(K)$, và ảnh của đồng cấu

$$\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \to C_p(K)$$

được gọi là *nhóm các p-biên* và được kí hiệu là $B_p(K)$.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lí thuyết trong quá trình thực hiện bài báo; nghiên cứu một số tài liệu của những tác giả đi trước, bằng cách tương tự hóa để đưa ra kết quả cho bài báo.

3.Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

3.1.1. Định lí. *Với mỗi nhóm cyclic hữu hạn cho trước, tồn tại một phức đơn hình hữu hạnsao cho có nhóm đồng điều 1-chiều đẳng cấu với nó.*

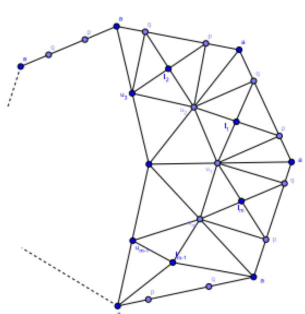
Chứng minh. Đối với mỗi $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m \geq 2,$ ta gọi M là phức đơn hình được biểu diễn bởi đa giác *m*-cạnh (xem Hình 1).

Đầu tiên ta quy các 1-chu trình về 1-chu trình đặc biệt theo cách như sau:

Giả sử c là 1-xích cho trước, α là giá trị của c trên $[o, u_1]$. Khi đó, bằng cách tính toán trực tiếp, ta suy ra rằng:

$$c_1 = c - \partial(\alpha[o, u_1, u_2])$$

là xích có giá trị 0 trên đơn hình định hướng $[o, u_1]$.Như vậy, bằng cách cải biên c bởi toán tử biên, ta có thể "đẩy $[0, u_1]$ ra khỏi nó" và c đồng điều với c_1. Sau đó, tương tự như vậy, ta "đẩy $[u_1, u_2]$ ra khỏi c_1".



Hình 1.

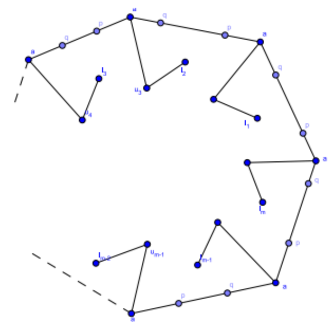
Giả sử β là giá trị của c_1 trên $[u_1, u_2]$. Khi đó,

$$c_2 = c_1 + \partial_2(\beta[u_1, I_1, u_2])$$

là xích có giá trị 0 trên đơn hình định hướng $[u_1, u_2]$. Hơn nữa, vì $[o, u_1]$ không xuất hiện trong biểu diễn của $\partial_2([u_1, I_1, u_2])$ và c_1 đồng điều với c_2 nên c_2 cũng có giá trị 0 trên $[o, u_1]$. Do đó, ta có thể đẩy $[o, u_1]$, $[u_1, u_2]$ ra khỏi *c*.

Bằng cách tương tự, ta sử dụng các đơnhình định hướng $[I_1, u_1, p]$, $[I_1, p, q]$, $[I_1, q, u_2]$, $[q, a, u_2]$, $[u_1, a, p]$ lần lượt đẩy $[I_1, u_1]$, $[I_1, p]$, $[I_1, q]$, $[u_2, q]$, $[u_1, p]$ ra khỏi *c*.

Tiếp tục quá trình này cho các tam giác chứa các điểm $I_2, I_3, ..., I_m$ ta suy ra c đồng điều với 1-xích d, mà có giá ở trên một phức con của M được biểu diễn ở Hình 2.



Hình 2.

Chú ý rằng phức con này không chứa các đơn hình $[o, u_1]$, $[o, u_2]$, ..., $[o, u_{m-1}]$, nhưng nó chứa đơn hình $[o, u_m]$.

Bây giờ, nếu c là một chu trình, thì d cũng là một chu trình. Điều này suy ra rằng giá trị của d trên đơn hình $[o, u_m]$ phải bằng 0. (vì nếu ngược lại, $\partial_1 d$ sẽ có giá trị khác không trên đỉnh o.)

Ta thấy rằng, các giá trị của d trên các đơn hình $[u_2, I_1], [u_3, I_2], ..., [u_m, I_{m-1}], [u_1, I_m]$ phải bằng 0 (vì nếu ngược lại, $\partial_1 d$ có một trong các đỉnh $I_1, I_2, ..., I_m$ có giá trị khác không).

Ta cũng thấy rằng các giá trị của d trên các đơn hình $[u_1, a], [u_2, a], ..., [u_m, a]$ phải bằng 0. (vì nếu ngược lại, $\partial_1 d$ có một trong các đỉnh $u_1, u_2, ..., u_m$ có giá trị khác không).

Do đó, với mỗi 1-chu trình của M là đồng điều với 1-chu trình có giá trị ở trên biên của đa giác *m*-cạnh (xem Hình 1).

Bây giờ, giả sử rằng:

$$d = \alpha[a, p] + \beta[p, q] + \gamma[q, a] \ (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}).$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}\partial d &= \alpha(p - a) + \beta(q - p) + \gamma(a - q) \\ &= (\alpha - \beta)p + (\beta - \gamma)q + (\gamma - \alpha)a.\end{aligned}$$

Mặt khác, vì d là một chu trình nên

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Do đó, $d = \alpha[a, p] + \alpha[p, q] + \alpha[q, a]$.

Ta xác định một ánh xạ $\varphi : \mathbb{Z}_m \to H_1(M)$ được cho bởi

$$\varphi(\overline{\alpha}) = \alpha[a, p] + \alpha[p, q] + \alpha[q, a] + B_1(M),$$

và giả sử $\{\sigma_i\}$ là tập tất cả các 2-đơn hình định hướng của M (xem Hình 1). Khi đó,

$$\partial_2(\sum \sigma_i) = m([a, p] + [p, q] + [q, a]).$$

Hơn nữa, ánh xạ này được xác định đúng đắn và nó là một đồng cấu. Từ các lập luận trên, ta suy ra rằng φ là một toàn cấu từ $\mathbb{Z}_m$ lên $H_1(M)$.

Bây giờ, ta chứng minh rằng φ là một đơn cấu. Thật vậy, giả sử $\overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_m$ sao cho $\varphi(\overline{\alpha}) = B_1(M)$. Khi đó,

$$\alpha[a, p] + \alpha[p, q] + \alpha[q, a] \in B_1(M).$$

Suy ra tồn tại 2-xích $e = \sum \beta_i \sigma_i$ của M sao cho

$$\partial_2 e = \alpha[a, p] + \alpha[p, q] + \alpha[q, a].$$

Bởi vì các giá trị của $\partial_2 e$ trên các 1-đơn hình mà không nằm trên biên của đa giác *m*-cạnh đều bằng 0 nên tacó $\beta_i = \beta_j$ với mỗi $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$. Như vậy,

$$\partial_2 e = \beta_1 m([a, p] + [p, q] + [q, a]).$$

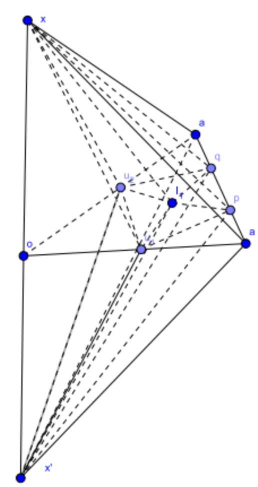
Suy ra $\alpha = \beta_1 m$. Điều này kéo theo $\overline{\alpha} = \overline{0}$ và φ là một đơn cấu.

Từ chứng minh trên ta suy ra rằng

$$H_1(M) \cong \mathbb{Z}_m.$$

Cuối cùng, ta thấy rằng, giá của M là tập liên thông nên nhóm đồng điều rút gọn $\widetilde{H}_0$ là nhóm tầm thường.

3.1.2. Định lí. *Với mỗi số tự nhiên $m \geq 2$, tồn tại một phức đơn hình hữu hạn mà có nhóm đồng điều 2-chiều đẳng cấu với $\mathbb{Z}_m$.*



Hình 3.

Chứng minh. Cho T là một phức đơn hình được biểu diễn bởi đa diện 2*m*-mặt sao cho mỗi phần tử của nó được biểu diễn ở Hình 3.

Tương tự Định lí 3.1.1, ta có thể tính trực tiếp $H_2(T) \cong \mathbb{Z}_m$. Bây giờ, ta dùng dãy khớp Mayer-Vietoris để chứng minh điều này. Thật vậy, giả sử M là phức trong chứng minh của Định lí 3.1.1. Khi đó, M là phức con của phức đơn hình T gồm tất cả các đơn hình nằm trên mặt phẳng ou_1u_2. Giả sử K_1, K_2 lần lượt là các phức con của phức đơn hình T gồm tất cả các đơn hình nằm phía trên và phía dưới mặt phẳng ou_1u_2 tương ứng. Khi đó, ta có

$$T = K_1 \cup K_2,\ M = K_1 \cap K_2.$$

Bởi vì K_1, K_2 là các nón nên nhóm đồng điều rút gọn của chúng đều tầm thường. Do đó, sử dụng dãy khớp Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} ... &\to \tilde{H}_p(M) \to \tilde{H}_p(K_1) \oplus \tilde{H}_p(K_2) \to \tilde{H}_p(T) \\ &\to \tilde{H}_{p-1}(M) \to \tilde{H}_{p-1}(K_1) \oplus \tilde{H}_{p-1}(K_2) \\ &\to \tilde{H}_{p-1}(T) \to ... \end{aligned}$$

ta được

$$\tilde{H}_p(T) \cong \tilde{H}_{p-1}(M).$$

Như vậy, $H_2(T) = \tilde{H}_2(T) \cong \tilde{H}_1(\mathrm{M}) \cong \mathbb{Z}_m$.

Chú ý rằng, ta cũng có

$$H_1(T) = \tilde{H}_1(T) \cong \tilde{H}_0(\mathrm{M}) = 0;$$
$$\tilde{H}_0(T) = 0.$$

Hoàn toàn tương tự như chứng minh Định lí 3.1.2, bằng cách sử dụng tích treo và dãy khớp Mayer-Vietoris (xem§25 trang 142 trong [3]), ta thu được.

3.1.3. Định lí. *Với mỗi số tự nhiên $m \geq 2$ và với mỗi $p \geq 1$, tồn tại một phức đơn hình hữu hạn T sao cho với mọi $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, p\}$ ta có*

$$H_p(T) \cong \mathbb{Z}_m, \tilde{H}_0(T) = 0, H_q(T) = 0.$$

3.1.4. Bổ đề. *Giả sử K, L là hai phức đơn hình sao cho giá của chúng rời nhau. Khi đó, với mỗi $p \in \mathbb{N}$, ta có*

$$H_p(K \cup L) = H_p(K) \oplus H_p(L).$$

Chứng minh. Bởi vì

$$C_p(K \cup L) = C_p(K) \oplus C_p(L)$$

nên ta có

$$Z_p(K \cup L) = Z_p(K) \oplus Z_p(L),$$
$$B_p(K \cup L) = B_p(K) \oplus B_p(L).$$

Hơn nữa, vì

$$B_p(K \cup L) \subset Z_p(K \cup L);$$
$$B_p(K) \subset Z_p(K); B_p(L) \subset Z_p(L)$$

nên ta thu được

$$H_p(K \cup L) = H_p(K) \oplus H_p(L).$$

3.1.5. Bổ đề. *Cho K, L là hai phức đơn hình mà có giá giao nhau là một đỉnh v chung của mỗi phức đơn hình. Khi đó, với mỗi $p \in \mathbb{N}$, ta có*

$$\tilde{H}_p(K \cup L) = \tilde{H}_p(K) \oplus \tilde{H}_p(L).$$

Chứng minh. Bởi vì $\tilde{H}_q(\{v\})$ là nhóm tầm thường với mọi số nguyên q nên sử dụng dãy khớp Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} ... &\to \tilde{H}_p(\{v\}) \to \tilde{H}_p(K) \oplus \tilde{H}_p(\mathrm{L}) \\ &\to \tilde{H}_p(K \cup L) \to \tilde{H}_p(\{v\}) \to \tilde{H}_{p-1}(\{v\}) \\ &\to \tilde{H}_{p-1}(K) \oplus \tilde{H}_{p-1}(\mathrm{L}) \to \tilde{H}_{p-1}(\mathrm{K} \cup \mathrm{L}) \to ... \end{aligned}$$

ta thu được

$$\tilde{H}_p(K) \oplus \tilde{H}_p(L) \cong \tilde{H}_p(K \cup L).$$

Ta biết rằng mỗi nhóm Abel hữu hạn sinh đẳng cấu với tổng trực tiếp của các nhóm cyclic hữu hạn và nhóm cyclic vô hạn, nhóm đồng điều *p*-chiều của một phức đơn hình biên của đơn hình (*p*+1)-chiều đẳng cấu với nhóm cyclic vô hạn. Do đó, nhờ Định lí 3.1.3, Bổ đề 3.1.5 ta thu được các định lí sau.

3.1.6. Định lí. *Giả sử G là một nhóm Abel hữu hạn sinh và $p \in \mathbb{N}^*$ mà $p \geq 1$. Khi đó, tồn tại một phức đơn hình hữu hạn K sao chovới mọi $q \in \mathbb{Z} \setminus \{p\}$, ta có*

$$\tilde{H}_p(K) \cong G, \tilde{H}_q(K) = 0.$$

3.1.7. Định lí. Cho $G_1, G_2, ..., G_n$ *là một dãy các nhóm Abel hữu hạn sinh sao cho tồn tại $p_0 \geq 0$ thỏa mãn*

$$G_p = 0 \text{ với mọi } p \geq p_0.$$

Khi đó, tồn tại một phức đơn hình hữu hạn K sao cho $\tilde{H}_p(K) \cong G_p$ với mọi $p \in \mathbb{N}^*$.

Sử dụng Định lí 3.1.3 và Bổ đề 3.1.5 ta thu được kết quả chính như sau.

3.1.8. Định lí. *Cho* $G_0, G_1, G_2, \ldots$ *là một dãy gồm các nhóm Abel hữu hạn sinh sao cho* G_0 *tự do và tồn tại* $p_0 \geq 0$ *thỏa mãn*

$$G_p = 0 \text{ với mọi } p > p_0.$$

Khi đó, tồn tại một phức đơn hình hữu hạn L *sao cho* $\tilde{H}_p(L) \cong G_p$ *với mọi* $p \in$ ¥.

Chứng minh. Giả sử K là một phức đơn hình thỏa mãn các điều kiện của Định lí 3.1.7 và r là số phần tử có trong một cơ sở của G_0. Ta bổ sung $r-1$ đỉnh phân biệt vào K sao cho các đỉnh này không thuộc vào giá của K. Khi đó, ta thu được phức đơn hình L cần tìm.

3.2. Đánh giá

Các nhà toán học trên thế giới vẫn chưa chứng minh được rằng mỗi CW phức là một phức đơn hình. Do vậy, trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một số kết quả mới: Định lí 3.1.1, Định lí 3.1.2, Định lí 3.1.3, Định lí 3.1.6 và Định lí 3.1.7. Các kết quả này tương tự như kết quả liên quan đến CW phức trong các tài liệu được đưa ra trước đây.

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã tìm được một số phức đơn hình sao cho các nhóm đồng điều của nó là các nhóm Abel hữu hạn sinh cho trước. Hơn nữa, ở đây chúng tôi tính toán trực tiếp nhóm đồng điều 1-chiều của phức đơn hình này.

Tài liệu tham khảo

[1] Allen Hatcher (2009), Algebraic Topology, Cambridge.

[2] James R. Munkres (2000), Topology, Prentice Hall, Inc.

[3] James R. Munkres (1984), Elements of Algebraic Topology, The Ben jamin/ Cummings Publishing Company, Inc.

EXISTENCE OF SIMPLICIAL COMPLEXS CONTAINING HOMOLOGY GROUPS ISOMORPHIC TO GIVEN FINITELY GENERATED ABELIAN GROUPS

Abstract: In Example 2.40 in [1], for each finite cyclic group, a CW Complex has been found with its *p*-th homologygroup isomorphic to itself (Moore Spaces). To calculate the homology groups of this CW complex, usage has been made of the homology of CW Complexes and the degree of a mapping from the sphere S^n into itself. But it is not known whether Moore spaces are Simplicial Complexes or not. Our aim is to find a Simplicial Complex whose homology groups are isomorphic to finitely generated abelian groups, where we are to directly compute the 1st homology group of this Simplicial Complex. First, for each finite cyclic group, we construct a Simplicial Complex and use the similar method in [2] (§78) to compute its 1st homology group. This group is isomorphic to the given finite cyclic group. Later, we construct the other Simplicial Complex and compute its *p*-th homology group based on Mayer - Vietoris sequences in [3] (§25).

Key words: CW complex; simplicial complex; cyclic group; homologygroup; Moore space.