UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

TÍNH CHẤT ĐẾM ĐƯỢC THỨ NHẤT CỦA KHÔNG GIAN CON CẦU TRƯỜNG ĐƯỢC

Ông Văn Tuyên[a*], Nguyễn Văn Trung Tín[b]

Nhận bài:
04 – 01 – 2017
Chấp nhận đăng:
20 – 06 – 2017
http://jshe.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Không gian tôpô G được gọi là không gian cầu trường được nếu tồn tại một phép đồng phôi $\varphi: G\times G \to G\times G$ và một phần tử $e\in G$ sao cho $\pi_1 o\varphi = \pi_1$, và với mỗi $x\in G$ ta có $\varphi(x,x)=(x,e)$, trong đó $\pi_1: G\times G\to G$ là phép chiếu lên tọa độ thứ nhất. Khi đó, phép đồng phôi φ được gọi là một phép cầu trường trên G và e gọi là phần tử đơn vị phải của G. Gần đây, không gian cầu trường được đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả và họ đã đặt ra nhiều câu hỏi mở mà đến nay vẫn chưa có lời giải đáp. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh được rằng nếu H là không gian con cầu trường được thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất của không gian cầu trường được G, thì $\overline{H}$ cũng là không gian con cầu trường được thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất của G. Nhờ kết quả này, chúng tôi nhận được một kết quả trong [1].

Từ khóa: nhóm tôpô; không gian cầu trường được; không gian con cầu trường được; không gian đồng nhất; không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất.

1. Giới thiệu

Năm 1936, G. Birkhoff đã giới thiệu nhóm tôpô [2]. Sau đó, M. M. Choban đã giới thiệu không gian cầu trường được và V. V. Uspenskij chứng minh được rằng mọi nhóm tôpô đều là không gian cầu trường được, nhưng tồn tại một không gian cầu trường được không phải là một nhóm tôpô [3, 8]. Từ đó đến nay, rất nhiều kết quả liên quan đến không gian này được các nhà toán học quan tâm nghiên cứu [4, 5, 6].

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh rằng nếu H là không gian con cầu trường được thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất của không gian cầu trường được G, thì $\overline{H}$ cũng là không gian con cầu trường được thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất của G. Nhờ đó, chúng tôi nhận được một kết quả trong [1].

Trong toàn bộ bài báo, khi cho các không gian G thì ta hiểu rằng G là không gian tôpô và chúng tôi quy ước tất cả các không gian là T_1, còn khái niệm và thuật ngữ khác nếu không nói gì thêm thì được hiểu thông thường. Hơn nữa, chúng tôi sử dụng kí hiệu ¥ $=\{1;2;3;...\}$ và $|A|$ là lực lượng của tập hợp A.

2. Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết

Nhóm tôpô G là một nhóm $(G,.)$ với một tôpô trên G sao cho ánh xạ tích $f_1: G\times G\to G$ được xác định bởi $f_1(x,y)=xy$ và ánh xạ ngược $f_2: G\to G$ được xác định bởi $f_2(x)=x^{-1}$ với mọi $x,y\in G$ là liên tục.

Nhóm tôpô G với phần tử đơn vị e là một không gian cầu trường được, trong đó một phép cầu trường φ trên G được xác định bởi $\varphi(x,y)=(x,x^{-1}y)$, với mọi $x,y\in G$. Tuy nhiên, hình cầu 7-chiều S_7 là một không gian cầu trường được nhưng không phải là một nhóm tôpô [8].

Không gian G là cầu trường được khi và chỉ khi tồn tại hai ánh xạ liên tục $p: G\times G\to G$ và $q: G\times G\to G$ sao cho với bất kì $x\in G, y\in G$, tồn tại $e\in G$ thỏa mãn

$$p(x,q(x,y)) = q(x,p(x,y)) = y;$$

[a]Trường THPT Ông Ích Khiêm, Đà Nẵng
[b]Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng
*** Liên hệ tác giả**
Ông Văn Tuyên
Email: tuyenvan612dn@gmail.com

$q(x,x)=e.$

Giả sử G là không gian cầu trường được. Khi đó,

$$p(x,e)=p(x,q(x,x))=x.$$

Hơn nữa, đôi khi chúng ta viết xy thay cho $p(x,y)$ và AB thay cho $p(A,B)$ với $A,B\subset G$.

Giả sử A là tập con của không gian cầu trường được G. Khi đó, A được gọi là *không gian con cầu trường được* của G nếu $p(A,A)\subset A$ và $q(A,A)\subset A$.

Không gian G được gọi là *đồng nhất* nếu với mỗi $x\in G$ và mỗi $y\in G,$ tồn tại một phép đồng phôi $f:G\to G$ sao cho $f(x)=y.$

Mỗi không gian cầu trường được là không gian đồng nhất và chính quy.

Họ β gồm các tập con nào đó của G được gọi là *cơ sở lân cận* của G tại điểm $x\in G$ nếu mọi phần tử của β đều chứa x và với mọi lân cận U của $x,$ tồn tại $V\in\beta$ sao cho $V\subset U.$

Không gian G được gọi là *thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất* nếu mỗi điểm của G có một cơ sở lân cận đếm được.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lí thuyết trong quá trình thực hiện bài báo. Nghiên cứu tài liệu của các tác giả đi trước để đưa ra những kết quả mới.

3. Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

Bổ đề 3.1.1 [7]. *Giả sử H là không gian con cầu trường được của không gian cầu trường được G. Khi đó, $\overline{H}$ cũng là không gian con cầu trường được của G.*

Chứng minh: Để chứng minh $\overline{H}$ là không gian con cầu trường được của G ta chỉ cần chứng minh $p(\overline{H},\overline{H})\subset\overline{H}$ và $q(\overline{H},\overline{H})\subset\overline{H}.$

Thật vậy, giả sử $x,y\in\overline{H}.$ Khi đó, với mọi U,V lần lượt là lân cận mở của x,y ta đều có

$$U\cap H\neq\varnothing \text{ và } V\cap H\neq\varnothing.$$

Mặt khác, vì p là ánh xạ liên tục nên với mọi W là lân cận mở của $p(x,y),$ tồn tại U_1,V_1 lần lượt là lân cận mở của x,y sao cho $p(U_1,V_1)\subset W.$ Hơn nữa, vì

$$U_1\cap H\neq\varnothing \text{ và } V_1\cap H\neq\varnothing$$

nên ta suy ra tồn tại $x_0\in U_1\cap H$ và $y_0\in V_1\cap H$ sao cho

$$\begin{aligned} p(x_0,y_0)&\in p(U_1\cap H,V_1\cap H)\\ &\subset p(U_1,V_1)\subset W.\end{aligned}$$

Tiếp theo, vì H là không gian con cầu trường được của G nên

$$p(x_0,y_0)\in p(H,H)\subset H.$$

Do đó, ta suy ra $p(x_0,y_0)\in H\cap W,$ kéo theo $H\cap W\neq\varnothing.$ Bởi vậy, $p(x,y)\in\overline{H}.$ Điều này chứng tỏ rằng $p(\overline{H},\overline{H})\subset\overline{H}.$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $q(\overline{H},\overline{H})\subset\overline{H}.$

Định lí 3.1.2. *Giả sử H là không gian con cầu trường được thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất của không gian cầu trường được G. Khi đó, $\overline{H}$ cũng là không gian con cầu trường được thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất của G.*

Chứng minh: Bởi vì H là không gian con cầu trường được thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất của không gian cầu trường được G nên theo Bổ đề 3.1.1, ta suy ra $K=\overline{H}$ là không gian con cầu trường được của $G,$ kéo theo K là không gian đồng nhất và chính quy. Như vậy, ta chỉ cần chứng minh K là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất. Với mọi $y\in H,$ vì H là không gian con cầu trường được của G nên

$$e=q(y,y)\in q(H,H)\subset H\subset\overline{H}=K.$$

Bởi vì K là không gian đồng nhất nên để chứng minh K là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất ta chỉ cần chứng minh rằng phần tử e có cơ sở lân cận đếm được trong $K.$ Thật vậy, giả sử β_H là cơ sở lân cận của H tại e sao cho $|\beta_H|\leq|¥|.$ Khi đó, với mỗi $U\in\beta_H,$ tồn tại lân cận mở U' trong H của e sao cho $U'\subset U,$ kéo theo tồn tại tập mở V_U trong K sao cho

$$V_U\cap H=U'\subset U.$$

Bây giờ, nếu ta đặt

$$\beta_K = \{V_U : U \in \beta_H\},$$

thì β_K là cơ sở lân cận của K tại e. Thật vậy, giả sử O là lân cận của e trong K. Khi đó, vì K là không gian chính quy nên tồn tại lân cận mở W trong K của e sao cho $\overline{W} \subset O$. Hơn nữa, vì β_H là cơ sở lân cận của H tại e và $W \cap H$ là lân cận mở trong H của e nên tồn tại $U \in \beta_H$ sao cho $U \subset W \cap H$. Tiếp theo, với mọi $x \in \overline{V_U}$ và V là lân cận mở trong K của x, ta có $V \cap V_U \neq \varnothing$ và $V \cap V_U$ là tập mở trong K. Mặt khác, vì H là trù mật trong K nên $(V \cap V_U) \cap H \neq \varnothing$, kéo theo $V \cap (V_U \cap H) \neq \varnothing$. Do đó, $x \in \overline{V_U \cap H}$, kéo theo $\overline{V_U} \subset \overline{V_U \cap H}$. Bởi vậy,

$$\overline{V_U} = \overline{V_U \cap H} \subset \overline{U} \subset \overline{W} \subset O.$$

Do vậy, $e \in V_U \subset \overline{V_U} \subset O$. Điều này chứng tỏ rằng họ β_K là cơ sở lân cận của K tại e và

$$|\beta_K| \le |\beta_H| \le |¥|.$$

Như vậy, $K = \overline{H}$ là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất.

Hệ quả 3.1.3 [1]. *Giả sử H là nhóm con thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất của nhóm tôpô G. Khi đó, $\overline{H}$ cũng là nhóm con thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất của G.*

3.2. Đánh giá

Chúng tôi tìm thêm được một tính chất mới của không gian con cầu trường được thể hiện trong Định lí 3.1.2.

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh được rằng nếu H là không gian con cầu trường được thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất của không gian cầu trường được G, thì $\overline{H}$ cũng là không gian con cầu trường được thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất của G. Nhờ đó, chúng tôi nhận lại được một kết quả trong [1].

Tài liệu tham khảo

[1] Arhangel'skii A.V., Tkachenko M. (2008), Topological Groups and Related Structures, Atlantis Press and World Scientific.

[2] Birkhoff G. (1936), “A note on topological groups”, Comput. Math., 3, 427-430.

[3] Choban M. M. (1987), On topological homogenous algebras, In: Interim Reports of II Prague Topol. Sym., Prague, 25-26.

[4] Gul’ko A. S. (1996), “Rectifiable spaces”, Topology Appl., 68, pp.107-112.

[5] Lin F., Liu C. and Lin S. (2012), “A note on rectifiable spaces”, Topology Appl., 159, pp.2090-2101.

[6] Lin F., Zhang J. and Zhang K. (2015), “Locally σ-compact rectifiable spaces”, Topology Appl., 193, pp. 182-191.

[7] Ông Văn Tuyên và Nguyễn Văn Trung Tín (2017), “Một số tính chất mới của không gian cầu trường được”, Tạp chí Khoa học & Giáo dục - Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, 22(01).2017.

[8] Uspenskij V. V. (1989), “Topological groups and Dugundji compacta”, Mat. Sb., 180 (8), pp. 1092-1118.

THE FIRST COUNTABLE PROPERTY OF RECTIFIABLE SUBSPACES

Abstract: A topological space G is called a rectifiable space if there exist a homeomorphism $\varphi : G \times G \to G \times G$ and an element $e \in G$ such that $\pi_1 \circ \varphi = \pi_1$ and for every $x \in G$ we have $\varphi(x, x) = (x, e)$, where $\pi_1 : G \times G \to G$ is the projection to the first coordinate. Then, φ is called a rectification on G and e is a right unit element of G. Recently, rectifiable spaces have been studied by many authors, who have raised various open questions that have yet to be answered. In this article, we prove that if H is a rectifiable subspace that satisfies the first countable premise of a rectifiable space G, then $\overline{H}$ is also a first-countable subspace of G. This helps us to achieve the result in [1].

Key words: topological group; rectifiable space; rectifiable subspace; homogenous space; first-countable space.