UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

KHẢO SÁT TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC CỦA HỆ DỪNG TUYẾN TÍNH KHÔNG THEO CHUẨN R. E. KALMAN

Nhận bài:
27 – 01 – 2017
Chấp nhận đăng:
20 – 06 – 2017
http://jshe.ued.udn.vn/

Lê Hải Trung

Tóm tắt: Nội dung của bài báo trình bày ví dụ cho hệ dừng tuyến tính dạng $\dot{x}(t) = Bx(t) + Du(t)$ mà tính điều khiển là không thỏa mãn tiêu chuẩn R. E. Kalman, tuy nhiên thực tế lại là điều khiển được theo [4], [6]. Trong [5] bằng phương pháp dải băng ma trận, các tác giả Зыбин Е. Ю, Мисриханов М. Ш, Рябченко В. Н cũng đã đưa ra được khẳng định về tính điều khiển được của hệ, tuy nhiên khối lượng tính toán là rất phức tạp và khó khăn. Bằng các kết quả nhận được theo [4, 6] trong việc chuyển vấn đề điều khiển của hệ ban đầu về vấn đề điều khiển của hệ tương đương trong không gian nhỏ hơn thông qua vai trò của các hàm tựa điều khiển ta cũng nhận được kết quả tương tự với cách tính toán thuận tiện hơn.

Từ khóa: hệ dừng; tính điều khiển được; tiêu chuẩn Kalman; ma trận; hàm tựa điều khiển.

1. Giới thiệu

Xét hệ dừng tuyến tính dạng:

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + Du(t) \qquad (1)$$

với $x(t) = (x_1(t)\ \ x_2(t)....x_n(t))^T$; $u(t) = (u_1(t)\ \ u_2(t)....u_m(t))^T$; $B = (b_{ij})_{n\times n}$; $D = (d_{ij})_{n\times m}$; $t \in [0,\mathrm{T}]$.

Với hệ (1) thì câu hỏi rất quan trọng đó chính là tính điều khiển được của hệ [1, 4, 5, 6]. Trên cơ sở của định lý 2 ta xét một ví dụ để khảo sát tính điều khiển được mà không thỏa mãn tiêu chuẩn Kalman.

Định nghĩa 1 [1]. Ma trận: $K = (D\,|\,BD\,|\,...\,|\,B^{n-1}D)$ được gọi là ma trận điều khiển của (1).

Định lý 1 (Tiêu chuẩn Kalman [1]). *Để hệ (1) là điều khiển được thì điều kiện cần và đủ là:*

$$rank(D\,|\,BD\,|\,...\,|\,B^{n-1}D) = n. \qquad (2)$$

Bằng phương pháp phân tách không gian [4, 6] đã chuyển được vấn đề điều khiển được của (1) về tính điều khiển được của hệ tương đương sau:

$$\dot{x}_p(t) = B_p x_p(t) + D_p u_p(t),$$

và có được nội dung định lý sau:

Định lý 2 [6]. *Hệ (1) là điều khiển được khi và chỉ khi tồn tại $p \in N^*$ để D_p là ma trận toàn ánh.*

Sau đây ta sẽ trình bày một hệ mà không điều khiển được theo (2) nhưng lại là điều khiển được theo Định lý 2.

2. Ứng dụng

Xét hệ dừng tuyến tính sau đây:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 - x_6 + 2x_7 + 6x_8 + 5u \\ \dot{x}_2 = 8x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 8x_5 + 3x_7 + 6x_8 + 7u \\ \dot{x}_3 = 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 7x_6 + 4x_7 + 5u \\ \dot{x}_4 = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 + 7x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 9u \\ \dot{x}_5 = 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 6x_6 + 5x_7 + 5x_8 + 3u \\ \dot{x}_6 = 4x_1 + 9x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 2x_6 + 7x_7 + 4x_8 \\ \dot{x}_7 = 4x_1 + x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 6x_6 + 5x_7 + 7x_8 + 9u \\ \dot{x}_8 = x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 9x_7 + 9x_8 + 4u, \end{cases} \qquad (3)$$

ở đây $x_i = x_i(t), i = \overline{1,8}; u = u(t)$, như thế hệ (3) có dạng (1) với $n = 8$, $m = 1$. Hệ đã cho viết được dưới dạng ma trận:

* **Liên hệ tác giả**
Lê Hải Trung
Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng
Email: lhtrung@ued.udn.vn

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 6 & 5 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & 1 & 3 & 8 & 0 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 3 & -1 & 0 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 8 & 9 & 6 & 5 & 5 \\ 4 & 9 & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 5 & 8 & 6 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 6 & 8 & 4 & 2 & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} u. \quad (4)$$

Trong [5] Зыбин Е. Ю, Мисриханов М. Ш, Рябченко В. Н đã chứng tỏ hệ (4) là không điều khiển được theo Kalman và trên cơ sở của phương pháp băng tần ma trận các tác giả trên đã khẳng định được tính điều khiển được của hệ đã cho. Bằng phương pháp chuyển về hàm tựa điều khiển trong không gian "hẹp hơn" ta đi chứng tỏ tính điều khiển được của (4) dựa trên cơ sở của Định lý 2. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có được:

$$u(t) = 0.2(\dot{x}_1 - 5x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 6x_4 - 5x_5 + x_6 - \\ - 2x_7 - 6x_8).$$

Thực hiện biến đổi trong phần mềm Mathematica ta nhận được:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 - \frac{7}{5}\dot{x}_1 = x_1 - \frac{21}{5}x_2 - \frac{16}{5}x_3 - \frac{27}{5}x_4 + x_5 + \frac{7}{5}x_6 + \frac{1}{5}x_7 - \frac{12}{5}x_8 \\ \dot{x}_3 - \dot{x}_1 = 2x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 + 8x_6 + 2x_7 - 6x_8 \\ \dot{x}_4 - \frac{9}{5}\dot{x}_1 = -4x_1 - \frac{37}{5}x_2 - \frac{12}{5}x_3 - \frac{59}{5}x_4 - 9x_5 + \frac{44}{5}x_6 - \frac{8}{5}x_7 - \frac{39}{5}x_8 \\ \dot{x}_5 - \frac{3}{5}\dot{x}_1 = x_1 - \frac{19}{5}x_2 + \frac{11}{5}x_3 + \frac{22}{5}x_4 + 6x_5 + \frac{33}{5}x_6 + \frac{19}{5}x_7 + \frac{7}{5}x_8 \\ \dot{x}_6 = 4x_1 + 9x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 2x_6 + 7x_7 + 4x_8 \\ \dot{x}_7 - \frac{9}{5}\dot{x}_1 = -5x_1 - \frac{67}{5}x_2 + \frac{18}{5}x_3 - \frac{29}{5}x_4 - x_5 + \frac{39}{5}x_6 + \frac{7}{5}x_7 - \frac{19}{5}x_8 \\ \dot{x}_8 - \frac{4}{5}\dot{x}_1 = -3x_1 - \frac{2}{5}x_2 + \frac{18}{5}x_3 + \frac{16}{5}x_4 + \frac{14}{5}x_6 + \frac{37}{5}x_7 + \frac{21}{5}x_8, \end{cases} \quad (5)$$

Thực hiện phép đổi biến:

$$y_1 = x_2 - \frac{7}{5}x_1,\ y_2 = x_3 - x_1, y_3 = x_4 - \frac{9}{5}x_1,$$

$$y_4 = x_5 - \frac{3}{5}x_1,\ y_5 = x_6, y_6 = x_7 - \frac{9}{5}x,$$

$$y_7 = x_8 - \frac{4}{5}x_1$$

ta đưa được hệ (5) về hệ phương trình tương đương sau đây:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\frac{21}{5}y_1 - \frac{16}{5}y_2 - \frac{27}{5}y_3 + y_4 + \frac{7}{5}y_5 + \frac{1}{5}y_6 - \frac{12}{5}y_7 - \frac{469}{25}x_1 \\ \dot{y}_2 = -4y_1 - y_2 - 3y_3 - y_4 + 8y_5 + 2y_6 - 6y_7 - \frac{59}{5}x_1 \\ \dot{y}_3 = -\frac{37}{5}y_1 - \frac{12}{5}y_2 - \frac{59}{5}y_3 - 9y_4 + \frac{44}{5}y_5 - \frac{8}{5}y_6 - \frac{39}{5}y_7 - \frac{1313}{25}x_1 \\ \dot{y}_4 = -\frac{19}{5}y_1 + \frac{11}{5}y_2 + \frac{22}{5}y_3 + 6y_4 + \frac{33}{5}y_5 + \frac{19}{5}y_6 + \frac{7}{5}y_7 + \frac{1313}{25}x_1 \\ \dot{y}_5 = 9y_1 + y_2 + 4y_3 + 6y_4 + 2y_5 + 7y_6 + 4y_7 + \frac{221}{5}x_1 \\ \dot{y}_6 = -\frac{67}{5}y_1 + \frac{18}{5}y_2 - \frac{29}{5}y_3 - y_4 + \frac{39}{5}y_5 + \frac{7}{5}y_6 - \frac{19}{5}y_7 - \frac{793}{25}x_1 \\ \dot{y}_7 = -\frac{2}{5}y_1 + \frac{18}{5}y_2 + \frac{16}{5}y_3 + \frac{14}{5}y_5 + \frac{37}{5}y_6 + \frac{21}{5}y_7 + \frac{562}{25}x_1, \end{cases} \quad (6)$$

Trong hệ (4) thì $u = u(t)$ đóng vai trò là hàm điều khiển còn $x_i = x_i(t), i = \overline{1,8}$ là hàm trạng thái vector. Khi thực hiện quá trình phân tách không gian thì vai trò hàm điều khiển sẽ bị thay đổi, do đó tại trong những không gian "hẹp" hơn - với ý nghĩa là cỡ của ma trận B_p, D_p sẽ nhỏ dần đi, thì $u_p = u_p(t)$ sẽ được gọi là các hàm tựa điều khiển còn $x_p = x_p(t)$ là các hàm tựa trạng thái. Như trong hệ (6) thì vai trò tựa điều khiển bây giờ là hàm $x_1(t)$, còn $y_j(t), j = \overline{1,7}$ đóng vai trò là hàm tựa điều khiển.

Lại từ phương trình thứ nhất của hệ (6) ta rút x_1 theo các biến còn lại:

$$x_1 = \frac{25}{469}(-\dot{y}_1 - \frac{21}{5}y_1 - \frac{16}{5}y_2 - \frac{27}{5}y_3 + y_4 + \frac{7}{5}y_5 \\ + \frac{1}{5}y_6 - \frac{12}{5}y_7),$$

và thực hiện tính toán trong Mathematica ta nhận được hệ phương trình tương đương sau:

$$
\begin{cases}
\dot{y}_2-\frac{295}{469}\dot{y}_1=-\frac{1163}{335}y_1+\frac{475}{469}y_2+\frac{186}{469}y_3-\frac{764}{469}y_4\\
\qquad+\frac{477}{67}y_5+\frac{879}{469}y_6-\frac{2106}{469}y_7\\
\dot{y}_3-\frac{1313}{469}\dot{y}_1=-\frac{8456}{1675}y_1+\frac{3076}{469}y_2+\frac{1556}{469}y_3-\frac{5534}{469}y_4\\
\qquad+\frac{327}{67}y_5-\frac{1013}{469}y_6-\frac{507}{469}y_7\\
\dot{y}_4+\frac{62}{67}\dot{y}_1=-\frac{7667}{1675}y_1-\frac{51}{67}y_2-\frac{40}{67}y_3+\frac{464}{67}y_4+\frac{529}{67}y_5\\
\qquad+\frac{267}{67}y_6-\frac{55}{67}y_7\\
\dot{y}_5+\frac{1105}{469}\dot{y}_1=\frac{2352}{335}y_1-\frac{3067}{469}y_2-\frac{4091}{469}y_3+\frac{3919}{469}y_4\\
\qquad+\frac{355}{67}y_5+\frac{3504}{469}y_6-\frac{776}{469}y_7\\
\dot{y}_6-\frac{793}{469}\dot{y}_1=-\frac{20066}{1675}y_1+\frac{4226}{469}y_2+\frac{1526}{469}y_3-\frac{1262}{469}y_4\\
\qquad+\frac{364}{67}y_5+\frac{498}{469}y_6+\frac{121}{469}y_7\\
\dot{y}_7+\frac{562}{469}\dot{y}_1=-\frac{2356}{1675}y_1-\frac{110}{469}y_2-\frac{1534}{469}y_3+\frac{562}{469}y_4\\
\qquad+\frac{300}{67}y_5+\frac{3583}{469}y_6+\frac{621}{469}y_7,
\end{cases}
\tag{7}
$$

Ta đưa vào phép đổi biến sau:

$$
z_1=y_2-\frac{295}{469}y_1,\ z_2=y_3-\frac{1313}{469}y_1,\ z_3=y_4+\frac{62}{67}y_1,
$$
$$
z_4=y_5+\frac{1105}{469}y_1,\ z_5=y_6-\frac{793}{469}y_1,\ z_6=y_7+\frac{562}{469}y_1,
$$

và chuyển được (7) về hệ:

$$
\begin{cases}
\dot{z}_1=\frac{475}{469}z_1+\frac{186}{469}z_2-\frac{764}{469}z_3+\frac{477}{67}z_4+\frac{879}{469}z_5-\frac{2106}{469}z_6+\frac{21694676}{1099805}y_1\\
\dot{z}_2=\frac{3076}{469}z_1+\frac{1556}{469}z_2-\frac{5534}{469}z_3+\frac{327}{67}z_4-\frac{1013}{469}z_5-\frac{507}{469}z_6+\frac{149194952}{5499025}y_1\\
\dot{z}_3=-\frac{51}{67}z_1-\frac{40}{67}z_2+\frac{464}{67}z_3+\frac{529}{67}z_4+\frac{267}{67}z_5-\frac{55}{67}z_6+\frac{9587552}{785575}y_1\\
\dot{z}_4=-\frac{3067}{469}z_1-\frac{4091}{469}z_2+\frac{3919}{469}z_3+\frac{355}{67}z_4+\frac{3504}{469}z_5-\frac{776}{469}z_6-\frac{4540869}{1099805}y_1\\
\dot{z}_5=\frac{4226}{469}z_1+\frac{1562}{469}z_2-\frac{1262}{469}z_3+\frac{364}{67}z_4+\frac{498}{469}z_5+\frac{121}{469}z_6+\frac{110516772}{5499025}y_1\\
\dot{z}_6=-\frac{110}{469}z_1-\frac{1534}{469}z_2+\frac{562}{469}z_3+\frac{300}{67}z_4+\frac{3583}{469}z_5+\frac{621}{469}z_6+\frac{64048227}{5499025}y_1.
\end{cases}
\tag{8}
$$

Như vậy tại bước thứ hai này ta nhận được hệ điều khiển tương đương với hệ ban đầu và kích cỡ của các ma trận trạng thái và điều khiển tương ứng B_2, D_2 đã giảm xuống còn bậc sáu so với bậc tám ban đầu.

Thực hiện tương tự bước trên bằng cách rút y_1 theo các biến còn lại và thế vào các phương trình trong hệ (8) và thực hiện phép đổi biến:

$$
r_1=z_2-\frac{37298738}{27118345}z_1,\ r_2=z_3-\frac{16778216}{27118345}z_1,\ r_3=z_4+\frac{4540869}{21694676}z_1,
$$
$$
r_4=z_5-\frac{27629193}{27118345}z_1,\ r_5=z_6-\frac{64048227}{108473380}z_1,
$$

ta nhận được hệ điều khiển:

$$
\dot{r}(t)=B_2r(t)+D_2z_1(t)
$$

mà các ma trận B_2, D_2 đã giảm xuống còn bậc năm:

$$
\begin{cases}
\dot{r}_1=\frac{75178208}{27118345}r_1-\frac{259225342}{27118345}r_2-\frac{133191033}{27118345}r_3\\
-\frac{128478623}{27118345}r_4+\frac{138170877}{27118345}r_5+\frac{1672187329789609}{735404635539025}z_1\\
\dot{r}_2=-\frac{22844104}{27118345}r_1+\frac{215136336}{27118345}r_2+\frac{94662619}{27118345}r_3\\
+\frac{76622889}{27118345}r_4+\frac{53079659}{27118345}r_5+\frac{8333147288858671}{1470809271078050}z_1\\
\dot{r}_3=-\frac{93718889}{10847338}r_1+\frac{43471328}{5423669}r_2+\frac{147277679}{21694676}r_3\\
+\frac{170596095}{21694676}r_4-\frac{28143005}{10847338}r_5-\frac{19280340395579613}{2353294833724880}z_1\\
\dot{r}_4=\frac{79359968}{27118345}r_1-\frac{27963002}{27118345}r_2-\frac{49373843}{27118345}r_3\\
-\frac{22987473}{27118345}r_4+\frac{131062687}{27118345}r_5+\frac{10102203888546584}{735404635539025}z_1\\
\dot{r}_5=-\frac{190097159}{54236690}r_1+\frac{58579363}{27118345}r_2+\frac{29716563}{108473380}r_3\\
+\frac{708660403}{10847338}r_4+\frac{215615709}{54236690}r_5+\frac{5447027906543605 9}{11766474168624400}z_1.
\end{cases}
$$

Tại bước thứ tư sau khi thực hiện phép biến đổi ta nhận được một hệ phương trình vi phân cấp bốn dạng:

$$
\begin{cases}
\dot{p}_1=31.7514p_1+15.7286p_2+14.6304p_3-10.7381p_4+103.079r_1\\
\dot{p}_2=-26.4273p_1-10.908p_2-9.20705p_3+15.7639p_4-80.8195r_1\\
\dot{p}_3=56.718p_1+27.8511p_2+27.7743p_3-25.9481p_4+194.944r_1\\
\dot{p}_4=21.6213p_1+10.2732p_2+16.1785p_3-6.39763p_4+105.448r_1.
\end{cases}
$$

Tại bước thứ năm và thứ sáu các hệ nhận được tương ứng là:

$$
\begin{cases}
\dot{q}_1=1.42401q_1+2.26393q_2+7.34464q_3+12.2111p_1\\
\dot{q}_2=-1.89494q_1+0.105191q_2-5.64019q_3-7.41559p_1\\
\dot{q}_3=-5.8169q_1+1.21185q_2+4.58726q_3+0.685466p_1,
\end{cases}
\text{ và}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{w}_1=1.48004w_1-1.17991w_2-1.9952q_1\\
\dot{w}_2=1.08477w_1+4.17497w_2-6.32123q_1.
\end{cases}
$$

Thực hiện các phép biến đổi tương tự trong phần mềm Mathematica tại bước thứ bảy ta nhận được phương trình:

$$\dot{h} = 7.91315h - 28.674920093w_1$$

với hàm giả trạng thái là $h(t)$ và hàm tựa điều khiển là $w_1(t)$. Đến đây ta xác định được $D_7 = -28.674920093 \neq 0$, do đó theo các kết quả nhận được trong [4, 6] thì tính điều khiển được của hệ (4) được xác định.

Tài liệu tham khảo

[1] Красовский Н. Н. (1968), Теория управления движением. М.: Наука, 476с.

[2] Дьяконов. В. (2001), Mathematica 4: Учеб. курс. СПб.: Питер, 654с.

[3] Зубова. С. П, Ле Хай Чунг (2008), Полиномиальное решение линейной стационарной системы управления при наличии контрольных точек и ограничений на управление. Spectral and Evolution problems. Simferopol, Vol. 18, pp.71-75.

[4] Зубова. С. П., Раецкая Е. В., Ле Хай Чунг (2008), О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления. Автоматика и телемеханика, № 11, pp.41-47.

[5] Зыбин Е. Ю, Мисриханов М. Ш, Рябченко В. Н. (2006), Рекусивные тесты на управляемость и наблюдаемость больших динамических систем. Автоматика и телемеханика, № 5, pp.119- 132.

[6] Раецкая Е. В. (2004), Условная управляемость и наблюдаемость линейных систем: Дисс..канд.мат.наук.Воронеж.

AN INVESTIGATION INTO CONTROLLABILITY OF THE LINEAR STATIONARY SYSTEM THAT DOES NOT CONFORM TO KALMAN'S CRITERION

Abstract: The article presents an example of a linear stationary system in form of $\dot{x}(t) = Bx(t) + Du(t)$ whose controllability does not satisfy Kalman's criterion; however, the system is actually controllable according to [4,6]. In [5], using a band matrix, the authors Зыбин Е. Ю, Мисриханов М. Ш, Рябченко В. Н also confirmed the controllability of the system but their calculation work appeared to be very complex and difficult. By transferring the controllability of the system to that of an equivalent system in a smaller space via the role of pseudo-controllability functions, following the results obtained in [4] and [6], we have also achieved the same results with a more convenient calculation.

Key words: stationary system; controllability; Kalman's criterion; matrix; pseudo-controllability function.