UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

Nhận bài:
18 – 03 – 2017
Chấp nhận đăng:
28 – 06 – 2017
http://jshe.ued.udn.vn/

LUẬT MẠNH SỐ LỚN ĐỐI VỚI DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN ĐỘC LẬP CÓ KÌ VỌNG VÔ HẠN

Lê Văn Dũng[a], Nguyễn Thị Hải Yến[b*]

Tóm tắt: Luật mạnh số lớn là một trong những định lí giới hạn quan trọng được sử dụng trong nhiều lĩnh vực như thống kê, lí thuyết xác suất và các lĩnh vực kinh tế, bảo hiểm. Chẳng hạn trong thống kê, luật mạnh số lớn được sử dụng để ước lượng cỡ mẫu, giá trị trung bình và phương sai của biến ngẫu nhiên,... Luật mạnh số lớn đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập có kì vọng hữu hạn đã được nhiều tác giả trên thế giới quan tâm nghiên cứu. Đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập có kì vọng vô hạn, Nakata [2] đã đưa ra một số kết quả nghiên cứu mới về luật yếu số lớn, còn luận mạnh số lớn chưa được nghiên cứu. Trong bài báo này chúng tôi sẽ thiết lập luật mạnh số lớn đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập có kì vọng vô hạn.

Từ khóa: luật mạnh số lớn; biến ngẫu nhiên; độc lập; kì vọng vô hạn; định lí giới hạn.

1. Giới thiệu

Đối với dãy biến ngẫu nhiên $(X_n; n \geq 1)$ độc lập và có cùng phân bố xác suất, nếu có kì vọng hữu hạn thì luật mạnh số lớn chỉ ra rằng trung bình mẫu

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

sẽ hội tụ hầu chắc chắn về trung bình tổng thể $E(X_1)$ khi $n \to \infty$. Trong trường hợp kì vọng vô hạn, kết quả trên sẽ không còn đúng nữa.

Trong bài báo này chúng tôi sẽ thiết lập luật mạnh số lớn đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập (không nhất thiết có cùng phân bố xác suất) có kì vọng vô hạn.

Trong bài báo này chúng tôi giả thiết các biến ngẫu nhiên xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ với P là độ đo đủ.

2. Cơ sở lí thuyết và một số kí hiệu

2.1. Cơ sở lí thuyết

2.1.1. Định nghĩa [1, tr.202]

Dãy biến ngẫu nhiên $(X_n; n \geq 1)$ *hội tụ hầu chắc chắn* (h.c.c) đến biến ngẫu nhiên X khi $n \to \infty$ nếu:

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1. \quad (1)$$

Để chứng minh các kết quả về hội tụ hầu chắc chắn ta thường sử dụng định lí sau.

2.1.2. Định lí [1, tr.206]

Điều kiện cần và đủ để dãy biến ngẫu nhiên $(X_n; n \geq 1)$ hội tụ h.c.c đến biến ngẫu nhiên X là với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_{k\geq n} |X_k - X| > \varepsilon)) = 0. \quad (2)$$

2.1.3. Định lí [1, tr.150]

Cho $(X_n; n \geq 1)$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập, có kì vọng 0 và phương sai hữu hạn. Khi đó tồn tại hằng số dương C không phụ thuộc vào n sao cho:

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^2\right) \leq C\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2).$$

[a]Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng
* **Liên hệ tác giả**
Nguyễn Thị Hải Yến
Email: nthyen_kt@ued.udn.vn

2.1.4. Định nghĩa [3, tr.132-133]

Cho dãy biến ngẫu nhiên $(X_n; n \geq 1)$. Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Ta nói dãy biến ngẫu nhiên *tuân theo luật mạnh số lớn* nếu tồn tại dãy số thực $(a_n; n \geq 1)$ và dãy số dương $(b_n; n \geq 1)$ tăng ngặt ra vô hạn ($b_n \uparrow \infty$) sao cho:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - a_n}{b_n} = 0 \text{ h.c.c.} \qquad (3)$$

2.2. Một số kí hiệu

Với hai dãy số thực dương $\{a_n; n \geq 1\}$ và $\{b_n; n \geq 1\}$, chúng tôi đưa ra các kí hiệu $a_n = o(b_n)$, a_n © b_n theo thứ tự cho các khái niệm:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty.$$

Hàm chỉ tiêu của tập A được định nghĩa:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in A \\ 0 & \text{khi } x \notin A \end{cases}$$

Với $0 < \alpha \leq 1$, xét biến ngẫu nhiên X thỏa mãn điều kiện:

$$P(|X| > x) \text{ © } x^{-\alpha}, x > 0 \qquad (4)$$

Khi đó, áp dụng bất đẳng thức:

$$E(|X|) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$$

ta dễ dàng suy ra $E(|X|) = \infty$. Hơn nữa, ta còn có bổ đề sau.

Bổ đề [2]

Cho biến ngẫu nhiên X thỏa mãn điều kiện (4). Khi đó ta có:

$$E(|X| I_{\{|X| \leq x\}}) \text{ © } \begin{cases} x^{1-\alpha} & 0 < \alpha < 1 \\ \log(x) & \alpha = 1 \end{cases} \qquad (5)$$

và

$$E(X^2 I_{\{|X| \leq x\}}) \text{ © } x^{2-\alpha} \text{ với } 0 < \alpha \leq 1 \quad (6)$$

Để thuận tiện cho việc trình bày chứng minh, ở đây ta sử dụng hằng số C không nhất thiết giống nhau trong mỗi lần xuất hiện.

3. Kết quả

Định lí 3.1.

Cho $0 < \alpha \leq 1$, cho $\{X_n; n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập thỏa mãn điều kiện $P(|X_k| > x)$ © $x^{-\alpha}$ với mọi k và $\limsup_{x\to\infty} \sup_{k\geq 1} x^{\alpha} P(|X_k| > x) < \infty$. Giả sử rằng $\{a_n; n \geq 1\}$ và $\{b_n; n \geq 1\}$ là hai dãy số dương thỏa mãn điều kiện $b_n \uparrow \infty$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha} < \infty$. Khi đó ta có:

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k (X_k - E(X_k I_{\{|X_k| \leq b_n/a_k\}})) = 0 \text{ h.c.c.}$$

Hơn nữa, nếu tồn tại $A \in$ ¡ sao cho:

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k I_{\{|X_k| \leq b_n/a_k\}}) = A$$

thì:

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k X_k = A \text{ h.c.c.}$$

Chứng minh:

Với mỗi $n \geq 1$, $k \geq 1$ đặt $X_{nk} = X_k I_{\{|X_k| \leq b_n/a_k\}}$,

$$S_n = b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k (X_k - E(X_k I_{\{|X_k| \leq b_n/a_k\}})),$$

$$S_n' = b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k (X_k - X_{nk}),$$

$$S_n'' = b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k (X_{nk} - E(X_{nk})).$$

Để chứng minh $S_n \to 0$ (h.c.c.) khi $n \to \infty$ ta chứng minh $S_n' \to 0$ (h.c.c.) và $S_n'' \to 0$ (h.c.c.) khi $n \to \infty$.

Với $\varepsilon > 0$ bé tùy ý, ta có:

$$P(\sup_{k\geq n}|S_k^{'}|>\varepsilon)\leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}(|S_k^{'}|>\varepsilon)\right)$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty}P(|S_k^{'}|>\varepsilon)\leq \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}P(|X_j|>b_k/a_j)$$

$$\leq C\sum_{k=n}^{\infty}b_k^{-\alpha}\sum_{j=1}^{k}a_j^{\alpha}\to 0 \text{ khi } n\to\infty.$$

Suy ra $S_n^{'}\to 0$ (h.c.c.) khi $n\to\infty$.

Mặt khác, ta cũng có:

$$P(\sup_{k\geq n}|S_k^{''}|>\varepsilon)\leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}(|S_k^{''}|>\varepsilon)\right)$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty}P(|S_k^{''}|>\varepsilon)\leq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2}E(|S_k^{''}|^2)$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{b_k^2}E\left(\left|\sum_{j=1}^{k}a_k(X_{kj}-E(X_{kj})\right|^2\right)$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{b_k^2}\sum_{j=1}^{k}a_j^2E(X_{kj}-E(X_{kj}))^2$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{b_k^2}\sum_{j=1}^{k}a_j^2E(X_j^2I_{\{|X_j|\leq b_k/a_j\}}))$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{b_k^2}\sum_{j=1}^{k}a_j^2\left(\frac{b_k}{a_j}\right)^{2-\alpha}$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{b_k^{\alpha}}\sum_{j=1}^{k}a_j^{\alpha}\to 0 \text{ khi } n\to\infty.$$

Suy ra $S_n^{''}\to 0$ (h.c.c.) khi $n\to\infty$.

Định lí được chứng minh.

Ví dụ 3.2.

Tung một đồng xu cân đối đồng chất cho đến khi xuất hiện mặt sấp thì dừng lại. Nếu dừng lại ở lần tung thứ i thì người chơi được nhận số tiền là 2^i (đồng). Người chơi tham gia trò chơi n lần, gọi X_n là số tiền người chơi nhận được ở lần chơi thứ n. Khi đó, $\{X_n; n\geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố xác suất:

$$P(X_n=2^i)=\frac{1}{2^i}, i=1,2,...$$

và

$$P(|X_n|>x) © x^{-1},\ x>0 \text{ (xem [2])}$$

Xét dãy số $b_n = n^2\ln(n)$ và $a_n = 1/n$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\infty.$$

Áp dụng Định lí 3.1 ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\ln(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(X_k-E(X_kI_{\{|X_k|\leq kn^2\ln(n)\}}))=0$$

h.c.c.

Hệ quả 3.3.

Cho $0<\alpha<1$, *cho* $\{X_n; n\geq 1\}$ *là dãy biến ngẫu nhiên độc lập thỏa mãn điều kiện (4). Hơn nữa, giả sử rằng* $\{a_n; n\geq 1\}$ *và* $\{b_n; n\geq 1\}$ *là hai dãy số dương thỏa mãn điều kiện* $b_n\uparrow\infty$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}a_k^{\alpha}<\infty$. *Khi đó ta có:*

$$\lim_{n\to\infty}b_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}a_kX_k=0 \text{ h.c.c.}$$

Chứng minh:

Do $0<\alpha<1$, áp dụng biểu thức (5) ta có:

$$\left|b_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}a_kE(X_kI_{\{|X_k|\leq b_n/a_k\}})\right|$$

$$\leq b_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}a_kE(|X_k|I_{\{|X_k|\leq b_n/a_k\}})$$

$$\leq Cb_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\frac{b_n}{a_k}\right)^{1-\alpha}$$

$$=Cb_n^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}a_k^{\alpha}\to 0 \text{ khi } n\to\infty.$$

Vì vậy, áp dụng Định lí 3.1, ta có điều phải chứng minh.

4. Kết luận

Để thu được luật mạnh số lớn chúng tôi đã đưa ra điều kiện mạnh hơn đối với dãy $\{a_n; n \geq 1\}$ *và* $\{b_n; n \geq 1\}$.

Hiển nhiên với điều kiện này chúng ta cũng thu được luật yếu số lớn. Kết quả này có thể mở rộng đối với dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc khác như m - phụ thuộc, liên kết âm.

Tài liệu tham khảo

[1] Allan Gut (2005), Probability: A Graduate Course, Springer.

[2] Toshio Nakata (2016), Weak laws of large numbers for weighted independent random variabels with infinite mean, Statistics and Probability letters, 109, pp.124-129.

[3] Đặng Hùng Thắng (2013), Xác suất nâng cao, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

STRONG LAWS OF LARGE NUMBERS FOR SEQUENCES OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES WITH INFINITE MEAN

Abstract: The strong law of large numbers is one of the important limit theorems, which is used in a variety of fields including statistics, probability theories, and areas of economics and insurance. For example, in statistics, the strong law of large numbers can be used to optimize sample sizes, mean and variance of random variables. Strong laws of large numbers for sequences of independent random variables with finite mean have been studied by many authors in the world. As regards sequences of independent random variables with infinite mean, Nakata [2] established some new results of weak laws of large numbers, while strong laws of large numbers have not been studied. In this article, we establish strong laws of large numbers for sequences of independent random variables with infinite mean.

Key words: strong law of large numbers; random variable; independence; infinite mean; limit theorem.