UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

MỘT SỐ TÍNH CHẤT MỚI CỦA KHÔNG GIAN CẦU TRƯỜNG ĐƯỢC

Ông Văn Tuyên[a*], Nguyễn Văn Trung Tín[b]

Nhận bài:
03 – 12 – 2016
Chấp nhận đăng:
20 – 03 – 2017
http://jshe.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Không gian tôpô G được gọi là không gian cầu trường được nếu tồn tại một phép đồng phôi $\varphi: G\times G \to G\times G$ và một phần tử $e\in G$ sao cho $\pi_1 o \varphi = \pi_1,$ và với mỗi $x\in G$ ta có $\varphi(x,x)=(x,e),$ trong đó $\pi_1: G\times G\to G$ là phép chiếu lên tọa độ thứ nhất. Khi đó, phép đồng phôi φ được gọi là một phép cầu trường trên G và e gọi là phần tử đơn vị phải của G. Gần đây, không gian cầu trường được đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả và họ đã đặt ra nhiều câu hỏi mở mà đến nay vẫn chưa có lời giải đáp. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh được rằng nếu K là một tập con compact và F là một tập con đóng trong không gian cầu trường được G sao cho $K\cap F=\varnothing,$ thì tồn tại một lân cận mở V của $e\in G$ sao cho $KV\cap F=\varnothing.$ Hơn nữa, chúng tôi đưa ra hai tính chất khác liên quan đến không gian con cầu trường được. Nhờ đó, chúng tôi nhận lại được một kết quả trong [1].

Từ khóa: nhóm tôpô; không gian cầu trường được; không gian con cầu trường được; tập con compact; tập con đóng.

1. Giới thiệu

Năm 1936, G. Birkhoff đã giới thiệu nhóm tôpô [2]. Sau đó, M. M. Choban đã giới thiệu không gian cầu trường được và V. V. Uspenskij chứng minh được rằng mọi nhóm tôpô đều là không gian cầu trường được, nhưng tồn tại một không gian cầu trường được không phải là một nhóm tôpô [3,7]. Từ đó đến nay, rất nhiều kết quả liên quan đến không gian này được các nhà toán học quan tâm nghiên cứu (xem [4], [5], [6]).

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh rằng nếu K là một tập con compact và F là một tập con đóng trong không gian cầu trường được G sao cho $K\cap F=\varnothing,$ thì tồn tại một lân cận mở V của $e\in G$ sao cho $KV\cap F=\varnothing.$ Hơn nữa, chúng tôi đưa ra hai tính chất khác liên quan đến không gian con cầu trường được. Nhờ đó, chúng tôi nhận lại được một kết quả trong [1].

Trong toàn bộ bài báo, khi cho các không gian G thì ta hiểu rằng G là không gian tôpô và chúng tôi quy ước tất cả các không gian là $T_1,$ còn khái niệm và thuật ngữ khác nếu không nói gì thêm thì được hiểu thông thường.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lý thuyết

Nhóm tôpô G là một nhóm G với một tôpô trên G sao cho ánh xạ tích $p: G\times G\to G$ được xác định bởi $p(x,y)=xy$ và ánh xạ ngược $q: G\to G$ được xác định bởi $q(x)=x^{-1}$ với mọi $x,y\in G$ liên tục.

Không gian G là cầu trường được khi và chỉ khi tồn tại hai ánh xạ liên tục $p: G\times G\to G$ và $q: G\times G\to G$ sao cho với bất kì $x\in G, y\in G$, tồn tại $e\in G$ thõa mãn:

$$p(x,q(x,y))=q(x,p(x,y))=y;$$

$$q(x,x)=e.$$

Giả sử G là không gian cầu trường được. Khi đó,

[a]Trường THPT Ông Ích Khiêm, Đà Nẵng
[b]Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng
* **Liên hệ tác giả**
Ông Văn Tuyên
Email: tuyenvan612dn@gmail.com

$$p(x,e)=p(x,q(x,x))=x.$$

Hơn nữa, đôi khi chúng ta viết xy thay cho $p(x,y)$ và AB thay cho $p(A,B)$ với $A,B\subset G$.

Giả sử G là không gian cầu trường được. Ta cố định $x\in G$, xét các ánh xạ $f_x:G\to G$ được xác định bởi

$$f_x(y)=p(x,y) \text{ với mọi } y\in G$$

và $g_x:G\to G$ được xác định bởi

$$g_x(y)=q(x,y) \text{ với mọi } y\in G.$$

Khi đó, f_x và g_x là các phép đồng phôi.

Giả sử A là tập con của không gian cầu trường được G. Khi đó, A được gọi là *không gian con cầu trường được* của G nếu $p(A,A)\subset A$ và $q(A,A)\subset A$.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết trong quá trình thực hiện bài báo. Nghiên cứu tài liệu của các tác giả đi trước để đưa ra những kết quả mới.

3.Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

3.1.1. Bổ đề: *Giả sử G là không gian cầu trường được, $A\subset G$ và U là một tập con mở trong G. Khi đó, $p(A,U)$ và $q(A,U)$ là các tập con mở trong G.*

Chứng minh: Với mỗi $x\in A$, ta có f_x và g_x là các phép đồng phôi. Do đó, chúng là các ánh xạ mở. Bởi vậy, $f_x(U)=p(x,U)$ và $g_x(U)=q(x,U)$ là các tập con mở trong G. Hơn nữa, vì

$$p(A,U)=\bigcup_{x\in A}p(x,U);$$

$$q(A,U)=\bigcup_{x\in A}q(x,U)$$

nên ta có $p(A,U)$ và $q(A,U)$ là các tập con mở trong G.

3.1.2. Bổ đề: *Giả sử G là không gian cầu trường được và $x\in G$. Khi đó,*

(1) *Nếu U là một lân cận mở của x, thì tồn tại một lân cận mở V của $e\in G$ sao cho $xV\subset U$.*

(2) *Nếu U là một lân cận mở của $e\in G$, thì xU là một lân cận mở của x, và tồn tại một lân cận mở V của $e\in G$ sao cho $q(xV,x)\subset U$.*

Chứng minh:

(1) Ta có $p(x,e)=x$ và p là ánh xạ liên tục. Hơn nữa, vì U là một lân cận mở của x nên tồn tại một lân cận mở W của x và một lân cận mở V của $e\in G$ sao cho:

$$xV=p(x,V)\subset p(W,V)\subset U.$$

(2) Bởi vì U là lân cận mở của $e\in G$ nên nhờ Bổ đề 3.1.1 ta suy ra xU là lân cận mở của x. Mặt khác, vì $q(x,x)=e$ và ánh xạ q liên tục nên tồn tại hai lân cận mở V_1 và V_2 của x sao cho $q(V_1,V_2)\subset U$. Theo (1), tồn tại một lân cận mở V của $e\in G$ sao cho:

$$x\in xV\subset V_1\cap V_2.$$

Bởi vậy, $q(xV,x)\subset U$.

3.1.3. Định lí: *Giả sử K là một tập con compact và F là một tập con đóng trong không gian cầu trường được G sao cho $K\cap F=\varnothing$. Khi đó, tồn tại một lân cận mở V của $e\in G$ sao cho $KV\cap F=\varnothing$.*

Chứng minh: Giả sử $K\cap F=\varnothing$ và F là tập đóng trong G. Khi đó, với mỗi $x\in K$, tồn tại một lân cận mở U_x của x sao cho $U_x\cap F=\varnothing$. Theo Bổ đề 3.1.2, tồn tại một lân cận mở V_x của $e\in G$ sao cho $xV_x\subset U_x$, và xV_x là một lân cận mở của x. Hơn nữa, vì $p(x,e)=x$ và ánh xạ p liên tục nên tồn tại một lân cận mở W_x của x và một lân cận mở U_e của $e\in G$ sao cho:

$$p(W_x,U_e)\subset xV_x.$$

Tiếp theo, vì W_x là một lân cận mở của x nên theo Bổ đề 3.1.2(1) ta suy ra tồn tại một lân cận mở V_e của $e\in G$ sao cho $xV_e\subset W_x$. Do đó:

$$p(xV_e,U_e) \subset p(W_x,U_e) \subset xV_x.$$

Nhờ Bổ đề 3.1.2(2), $x(U_e \cap V_e)$ là một lân cận mở của x với mọi $x \in K$. Mặt khác, vì $\{x(U_e \cap V_e): x \in K\}$ là một phủ mở của K compact nên tồn tại tập con hữu hạn $L \subset K$ sao cho:

$$K \subset \bigcup_{x \in L} x(U_e \cap V_e).$$

Bây giờ, nếu ta đặt:

$$V = \bigcap_{x \in L} (U_e \cap V_e),$$

thì V là một lân cận mở của $e \in G$. Hơn nữa, ta có $KV \cap F = \varnothing$. Thật vậy, với mỗi $y \in K$, tồn tại $x \in L$ sao cho $y \in x(U_e \cap V_e)$. Do đó,

$$\begin{aligned} yV &\subset p\big(x(U_e \cap V_e),(U_e \cap V_e)\big) \\ &\subset xV_x \subset G \setminus F. \end{aligned}$$

Bởi vậy, $yV \cap F = \varnothing$ với mọi $y \in K$. Điều này chứng tỏ rằng $KV \cap F = \varnothing$.

3.1.4. Hệ quả: *Giả sử K là một tập con compact và F là một tập con đóng trong nhóm tôpô G sao cho $K \cap F = \varnothing$. Khi đó, tồn tại một lân cận mở V của phần tử đơn vị $e \in G$ sao cho $KV \cap F = \varnothing$.*

3.1.5. Định lí: *Giả sử H là không gian con cầu trường được của không gian cầu trường được G. Khi đó, $\overline{H}$ cũng là không gian con cầu trường được của G.*

Chứng minh: Để chứng minh $\overline{H}$ là không gian con cầu trường được của G ta chỉ cần chứng minh $p(\overline{H},\overline{H}) \subset \overline{H}$ và $q(\overline{H},\overline{H}) \subset \overline{H}$.

Thật vậy, giả sử $x, y \in \overline{H}$. Khi đó, với mọi U, V lần lượt là lân cận mở của x, y ta đều có:

$$U \cap H \neq \varnothing \text{ và } V \cap H \neq \varnothing.$$

Mặt khác, vì p là ánh xạ liên tục nên với mọi W là lân cận mở của $p(x,y)$, tồn tại U_1, V_1 lần lượt là lân cận mở của x, y sao cho $p(U_1,V_1) \subset W$. Hơn nữa, vì

$$U_1 \cap H \neq \varnothing \text{ và } V_1 \cap H \neq \varnothing$$

nên ta suy ra tồn tại $x_0 \in U_1 \cap H$ và $y_0 \in V_1 \cap H$ sao cho :

$$\begin{aligned} p(x_0,y_0) &\in p(U_1 \cap H, V_1 \cap H) \\ &\subset p(U_1,V_1) \subset W. \end{aligned}$$

Tiếp theo, vì H là không gian con cầu trường được của G nên:

$$p(x_0,y_0) \in p(H,H) \subset H.$$

Do đó, ta suy ra $p(x_0,y_0) \in H \cap W$, kéo theo $H \cap W \neq \varnothing$. Bởi vậy, $p(x,y) \in \overline{H}$. Điều này chứng tỏ rằng $p(\overline{H},\overline{H}) \subset \overline{H}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $q(\overline{H},\overline{H}) \subset \overline{H}$.

3.1.6. Hệ quả [1]: *Giả sử H là nhóm con của nhóm tôpô G. Khi đó, $\overline{H}$ cũng là nhóm con của G.*

3.1.7. Định lí: *Giả sử H là không gian con cầu trường được của không gian cầu trường được G. Khi đó, nếu $h \in H$ và $x \in G$ thỏa mãn $p(h,x) \in H$, thì $x \in H$.*

Chứng minh. Bởi vì $h \in H$ và $p(h,x) \in H$ nên ta suy ra:

$$x = q(h, p(h,x)) \in q(H,H).$$

Mặt khác, vì H là không gian con cầu trường được của G nên $q(H,H) \subset H$. Do đó, $x \in H$.

3.2. Đánh giá

Chúng tôi tìm thêm được một số tính chất của không gian cầu trường được và không gian con cầu trường được thể hiện trong Định lí 3.1.3, Định lí 3.1.5 và Định lí 3.1.7.

4.Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh rằng nếu K là một tập con compact và F là một tập con đóng trong không gian cầu trường được G sao cho $K \cap F = \varnothing$, thì tồn tại một lân cận mở V của $e \in G$ sao cho

$KV \cap F = \varnothing$. Hơn nữa, chúng tôi đưa ra hai tính chất khác liên quan đến không gian con cầu trường được. Nhờ đó, chúng tôi nhận lại được một kết quả trong [1].

Tài liệu tham khảo

[1] Arhangel'skii A.V., Tkachenko M. (2008), Topological Groups and Related Structures, Atlantis Press and World Scientific.

[2] Birkhoff G. (1936), "A note on topological groups", Comput. Math., 3, pp.427-430.

[3] Choban M. M. (1987), On topological homogenous algebras, In: Interim Reports of II Prague Topol. Sym., Prague, pp.25-26.

[4] Gul'ko A. S. (1996), "Rectifiable spaces", Topology Appl., 68, pp.107-112.

[5] Lin F., Liu C. and Lin S. (2012), "A note on rectifiable spaces", Topology Appl., 159, pp.2090-2101.

[6] Lin F., Zhang J. and Zhang K. (2015), "Locally σ-compact rectifiable spaces", Topology Appl., 193, pp.182-191.

[7] Uspenskij V. V. (1989), "Topological groups and Dugundji compacta", Mat. Sb., 180(8), pp.1092-1118.

SOME NEW PROPERTIES OF RECTIFIABLE SPACES

Abstract: A topological space G is called a rectifiable space if there exist a homeomorphism $\varphi : G \times G \to G \times G$ and an element $e \in G$ such that $\pi_1 \circ \varphi = \pi_1$ and for every $x \in G$ we have $\varphi(x, x) = (x, e)$, where $\pi_1 : G \times G \to G$ is the projection to the first coordinate. Then, φ is called a rectification on G and e is a right unit element of G. Recently, rectifiable spaces have been studied by many authors and they have raised many open questions that still remain unanswered. In this article, we prove that if K is a compact subset and F is a closed subset of a rectifiable space G such that $K \cap F = \varnothing$, then there exists an open neighborhood V of $e \in G$ such that $KV \cap F = \varnothing$. Moreover, we give two other properties related to rectifiable subspaces. These serve as bases for us to obtain a result in [1].

Key words: topological group; rectifiable space; rectifiable subspace; compact subset; closed subset.