UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

ỨNG DỤNG VÔ CÙNG BÉ TƯƠNG ĐƯƠNG TÍNH GIỚI HẠN HÀM SỐ

Phan Đức Tuấn[a*], Nguyễn Thị Thu Thủy[b]

Nhận bài:
15 – 12 – 2016
Chấp nhận đăng:
20 – 02 – 2017
http://jshe.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Nhiều vấn đề của giải tích toán học dẫn đến bài toán tính giới hạn hàm số. Do đó, việc tính giới hạn của hàm số luôn được các nhà toán học quan tâm. Một bài toán tính giới hạn hàm số chỉ thực sự khó khăn khi nó có dạng vô định. Trong số các dạng vô định thì dạng vô định 0/0 là dạng phổ biến và quan trọng nhất vì hầu hết các dạng vô định khác đều có thể chuyển thành dạng 0/0. Bản chất của dạng vô định 0/0 là so sánh hai đại lượng vô cùng bé. Trong bài báo này, chúng tôi đã chọn hàm lũy thừa làm đại lượng vô cùng bé trung gian. Từ đó, thay vì so sánh hai vô cùng bé với nhau ta sẽ so sánh chúng với vô cùng bé trung gian trên. Do vậy, ta đã chuyển bài toán so sánh hai vô cùng bé về bài toán so sánh hai hàm luỹ thừa. Đây là bài toán đã có lời giải nên ta có được kết quả của bài toán ban đầu.

Từ khóa: vô cùng bé; vô cùng bé tương đương; so sánh vô cùng bé; giới hạn hàm số; khử dạng vô định; phương pháp tính giới hạn.

1. Đặt vấn đề

Trong lịch sử phát triển của xã hội loài người, có một giai đoạn con người mang các sản phẩm mình làm được ra chợ để đổi lấy các sản phẩm mình cần thông qua việc thỏa thuận trao đổi. Nhưng đến một lúc người ta phát hiện ra rằng một con lợn rừng không thể ngang bằng với ba chiếc cung nỏ. Do đó, người ta đã trao đổi các sản phẩm lao động của mình cho nhau thông qua một vật phẩm và có thể coi đó là những đồng tiền đầu tiên. Mỗi dân tộc tự tìm cho mình vật phẩm để trao đổi (xem như là tiền) chẳng hạn như ở Cực Bắc họ chọn con cừu làm vật phẩm trao đổi; ở Ấn Độ vỏ trai từng được chọn thay cho tiền; người Ai Cập cổ đại đã bắt đầu dùng tiền xu kim loại để trao đổi và người Trung Quốc đã phát minh ra tiền giấy để sử dụng.

Một ý tưởng vận dụng quy luật trên của cuộc sống vào khử dạng vô định 0/0 trong toán học như sau: Bài toán khử dạng vô định 0/0 chính là bài toán so sánh hai vô cùng bé (*VCB*). Do vậy, ta sẽ xem các đại lượng *VCB* như là các sản phẩm lao động. Theo quy luật trên ta cần tìm ra một vật phẩm (một loại hàm) xem như là tiền và xây dựng cách thức định giá các sản phẩm lao động ấy.

Ở bài báo này, chúng tôi chọn hàm lũy thừa ax^{λ} xem như là "tiền" và xây dựng cách thức "định giá" các *VCB* thông qua các cặp *VCB* tương đương cơ bản. Nhờ đó, để khử giới hạn có dạng vô định 0/0

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \qquad (1)$$

ta "định giá" $\alpha(x)\sim ax^{\lambda}$, $\beta(x)\sim bx^{\kappa}$. Khi đó, giới hạn (1) đưa về giới hạn (2) dưới đây và thu được kết quả

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{ax^{\lambda}}{bx^{\kappa}}=\begin{cases}0, & \lambda>\kappa,\\ a/b, & \lambda=\kappa,\\ \infty, & \lambda<\kappa.\end{cases} \qquad (2)$$

2. Một số kết quả liên quan

Định nghĩa 1 ([1, 2]).

i. Hàm $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé nếu $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Ký hiệu là: $VCB(x\to x_0)$.

ii. Hàm f được gọi là vô cùng lớn nếu $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Ký hiệu là: $VCL(x\to x_0)$.

[a]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*
[b]*trường Cao đẳng Kinh tế - Kỹ thuật Quảng Nam*
*** Liên hệ tác giả**
Phan Đức Tuấn
Email: pdtuan@ued.udn.vn

iii. Cho $\alpha(x),\ \beta(x)$ là hai $VCB(x \to x_0)$. Khi đó, $\alpha(x)$ được gọi là tương đương với $\beta(x)$ (ký hiệu là $\alpha(x) \sim \beta(x)$) nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)/\beta(x) = 1,$ và $\alpha(x)$ được gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ (ký hiệu là $\alpha(x) = o(\beta(x))$) nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)/\beta(x) = 0.$

Nhận xét 1. Bằng cách đổi biến $t = x - x_0$ khi $x_0 \in \mathbb{R}$ và $t = 1/x_0$ khi $x_0 = \infty.$ Ta đưa các $VCB(x \to x_0)$ về dạng $VCB(t \to 0).$ Do đó, trong bài báo này ta chỉ xét các $VCB(x \to 0).$

Ví dụ 1.

i. Các hàm ax^{λ} $(\lambda > 0),$ $\sin x,$ $\tan x$ là $VCB(x \to 0).$

ii. Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \sin x/x = 1,$ nên suy ra $\sin x \sim x.$

iii. Ta có $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)/2x = 0,$ nên suy ra $(1 - \cos x) = o(2x).$

Mệnh đề 1 ([1, 2], "định giá" các hàm sơ cấp cơ bản)**.** *Giả sử* $n > k > 0,\ a_k \neq 0,$ *ta có các cặp* $VCB(x \to 0)$ *sau tương đương với nhau:*

$$\sin x \sim x; \qquad \arcsin x \sim x;\ \tan x \sim x;$$
$$\arctan x \sim x;\ \ln(1 + x) \sim x;$$
$$(1 + x)^m - 1 \sim mx;\ e^x - 1 \sim x;\ 1 - \cos x \sim x^2/2;$$
$$a_n x^n + ... + a_k x^k \sim a_k x^k.$$

Nhận xét 2.

i. Mệnh đề 1 cho thấy các hàm sơ cấp thường gặp mà là *VCB* thì đều tương đương được với một hàm lũy thừa (nghĩa là đã "định giá" được).

ii. Theo Mệnh đề 1 thì $\sin x \sim x,$ khi $x \to 0.$ Do đó, với việc thay x bằng đại lượng *VCB* thì $\sin(VCB) \sim VCB.$ Do đó, các kết quả của Mệnh đề 1 được tổng quát thành $\arcsin(VCB) \sim VCB, \ldots$. Nhờ đó mà rất nhiều hàm hợp của các sơ cấp có thể tương đương được với một hàm lũy thừa.

Ví dụ 2. Khi $x \to 0,$ ta có

$$\ln(\cos 4x) = \ln(1 - 2\sin^2 2x) \sim -2\sin^2 2x \sim -8x^2.$$

Thật vậy, vì

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos 4x)}{-8x^2} = 1.$$

Định lý 1 ([1, 2])**.** *Giả sử* $\alpha_1(x), \alpha_2(x),\ \beta_1(x),$ $\beta_2(x)$ *là các* $VCB(x \to 0)$ *và* $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x),$ $\beta_1(x) \sim \beta_2(x).$ *Khi đó* $\alpha_1(x)\beta_1(x) \sim \alpha_2(x)\beta_2(x).$

Nhận xét 3. Khi các giả thiết của Định lý 1 được thỏa mãn, nói chung $\alpha_1(x) \pm \beta_1(x) \not\sim \alpha_2(x) \pm \beta_2(x).$ Do đó, $f(\alpha_1(x)) \not\sim f(\alpha_2(x))$ với f là một hàm số nào đó.

Ví dụ 3. Theo Mệnh đề 1 ta có

$$\sin x \sim x,\ \ x\cos x \sim x\cos x,\ \sin x \sim \tan x.$$

Tuy nhiên $\sin x - x\cos x \not\sim x - x\cos x$ và $1 - \sqrt{x/\sin x} \not\sim 1 - \sqrt{x/\tan x}.$ Thật vậy, vì

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x - x\cos x} = \frac{2}{3},\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x/\sin x}}{1 - \sqrt{x/\tan x}} = -\frac{1}{2}.$$

Hệ quả 1 ([2] thay thế *VCB* tương đương)**.** *Giả sử các giả thiết của Mệnh đề 1 được thỏa mãn. Khi đó*

$$\lim_{x \to 0} \alpha_1(x)\beta_1(x) = \lim_{x \to 0} \alpha_2(x)\beta_2(x),$$
$$\lim_{x \to 0} \alpha_1(x)/\beta_1(x) = \lim_{x \to 0} \alpha_2(x)/\beta_2(x),$$

nếu các giới hạn trên là tồn tại.

Định lý 2 ([1, 2], quy tắc bỏ *VCB* bậc cao)**.** *Nếu* $\alpha(x) = o(\beta(x))$ *thì* $\beta(x) \pm \alpha(x) \sim \beta(x).$

Định lý 3 ([3] quy tắc L'hospital)**.** *Giả sử* f *và* g *là các hàm liên tục trên* $[a,b]$ *và* $x_0 \in (a,b)$ *sao cho* $f(x_0) = g(x_0) = 0$*. Nếu trong một lân cận thủng nào đó của* x_0 *tồn tại* $f'(x), g'(x)$*,* $g'(x) \neq 0$ *và tồn tại hữu hạn* $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$ *thì*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3. Ứng dụng tính giới hạn hàm số

Bài toán 1. Khử dạng vô định 0/0 khi $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}. \qquad (3)$$

Phương pháp: Bài toán 1 chính là bài toán so sánh hai *VCB*. Do đó, ta cần "định giá" chúng để so sánh.

Nghĩa là, ta sử dụng các cặp *VCB* tương đương trong Mệnh đề 1 và Nhận xét 2 để "định giá":

$$\begin{cases}\alpha(x) \sim \alpha_1(x) \sim \ldots \sim ax^{\lambda},\\ \beta(x) \sim \beta_1(x) \sim .. \sim bx^{\kappa}.\end{cases}$$

Sử dụng (2) và Hệ quả 1, ta thu được kết quả của giới hạn (3).

Ví dụ 1. Tính giới hạn sau:

$$l_1 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[5]{1-15x\sin 2x}}{\ln(\cos 4x)}.$$

Giải: Sử dụng Mệnh đề 1, ta thu được

$$\begin{cases}1-\sqrt[5]{1-15x\sin 2x} \sim -\dfrac{1}{5}(-15x\sin 2x) \sim 6x^2,\\ \ln(1-2\sin^2 2x) \sim -2\sin^2 2x \sim -8x^2.\end{cases}$$

Theo (2) và Hệ quả 1, suy ra $l_1 = -3/4.$

Bài toán 2. Khử dạng vô định 0/0 khi $x \to x_0 \neq 0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Phương pháp: Ta đổi biến, đặt

$$\begin{cases}t = x - x_0 \quad \text{khi} \quad x_0 \neq \infty,\\ t = 1/x_0 \quad \text{khi} \quad x_0 = \infty.\end{cases}$$

Khi đó $t \to 0$ nên Bài toán 2 trở thành Bài toán 1.

Ví dụ 2. Tính giới hạn sau:

$$l_2 = \lim_{x\to 1}\frac{2^x - 2}{1-\sqrt[6]{2-x^2}}.$$

Giải: Đặt $t = x - 1,$ ta thu được

$$l_2 = \lim_{t\to 0}\frac{2(2^t - 1)}{1-\sqrt[6]{1-2t-t^2}},$$

sử dụng phương pháp của Bài toán 1, ta thu được

$$\begin{cases}2^t - 1 = e^{t\ln 2} - 1 \sim t\ln 2,\\ \sqrt[6]{1-2t-t^2} - 1 \sim \dfrac{1}{6}(-2t-t^2) \sim -\dfrac{1}{3}t.\end{cases}$$

Suy ra $l_2 = 6\ln 2.$

Bài toán 3. Khử các dạng vô định:

$$\infty/\infty,\ 0.\infty,\ 1^{\infty},\ 0^0 \text{ và } \infty^0.$$

Phương pháp: Sử dụng tính chất $1/VCL = VCB,$ ta chuyển các dạng vô định trên về dạng vô định 0/0 như sau:

i. Dạng $\infty/\infty: \dfrac{VCL_1}{VCL_2} = \dfrac{1/VCL_2}{1/VCL_1} = \dfrac{VCB_2}{VCB_1}.$

ii. Dạng $0.\infty: VCB_1.VCL_2 = \dfrac{VCB_1}{1/VCL_2} = \dfrac{VCB_1}{VCB_2}.$

iii. Các dạng $1^{\infty}, 0^0, \infty^0:$ ta có $u^v = e^{v\ln u}$ nên nếu $\lim v\ln u = l$ thì $\lim u^v = e^l.$ Do đó, để khử các dạng vô định của u^v ta chuyển sang khử dạng vô định của $v\ln u.$ Khi đó, dạng vô định sẽ thay đổi như sau:

$$\begin{Bmatrix}1^{\infty}\\ 0^0\\ \infty^0\end{Bmatrix} \leftrightarrow u^v \Rightarrow v\ln u \leftrightarrow \begin{Bmatrix}\infty.0\\ 0.\infty\\ 0.\infty\end{Bmatrix} \to \frac{0}{0}.$$

Ví dụ 3. Tính giới hạn sau:

$$l_3 = \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x\arcsin x}}.$$

Giải: Ta có

$$l_3 = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos 2x)}{x\arcsin x}}.$$

Ta đi tính giới hạn

$$k = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x\arcsin x}.$$

Theo phương pháp Bài toán 1, ta có

$$\begin{cases}\ln(\cos 2x) = \ln(1-2\sin^2 x) \sim -2\sin^2 x \sim -2x^2,\\ x\arcsin x \sim x^2,\end{cases}$$

suy ra $k = -2.$ Do vậy $l_3 = e^{-2}.$

4. Một số sai lầm khi dùng CVB tương đương

a. Sai lầm khi thay vô cùng bé tương đương vào tổng, hiệu

Trong quá trình tính giới hạn hàm số ta thường mắc sai lầm thay *VCB* tương đương vào tổng, hiệu các *VCB*. Sau đó, áp dụng Hệ quả 1 để suy ra kết quả. Khi đó, kết quả có thể không đúng vì theo Nhận xét 3 thì giả thiết của Hệ quả 1 không còn thỏa mãn.

Ví dụ 4. Tính giới hạn sau:

$$l_4 = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x\cos x}{x^3}.$$

Phân tích: Nếu ta thay *VCB* tương đương cho hiệu như sau: từ $\tan x \sim x,\ \sin x \sim x$ suy ra

$$\tan x - \sin x \cos x \sim x - x\cos x = x\sin^2(x/2) \sim x^3/4$$

suy ra $l_4 = 1/4$ (đây là kết quả sai).

Giải: Ta có

$$\tan x - \sin x \cos x = \tan x(1 - \cos^2 x) = \tan x \sin^2 x \sim x^3$$

suy ra $l_4 = 1$.

Nhận xét 4. Khi tính giới hạn nếu gặp dạng tổng, hiệu các *VCB* thì ta không được thay thế *VCB* tương đương. Do đó, để tính được giới hạn dạng này ta thường biến đổi để đưa về dạng tích, thương của các *VCB* như Ví dụ 4. Đôi khi, ta tách thành tổng, hiệu các giới hạn (nếu các giới hạn đó tồn tại). Ngoài ra, ta có thể kết hợp với quy tắc L'hospital hay thay thế *VCB* bậc cao hơn để tính giới hạn dạng này.

Ví dụ 5. Tính giới hạn sau:

$$l_5 = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{1-4x\arctan x}}{x^2}.$$

Phân tích: Khi thêm bớt 1 vào tử số ta sẽ được giới hạn dạng hiệu hai *VCB*. Trong trường hợp này, ta có thể tách thành hiệu hai giới hạn. Sau đó thay thế *VCB* tương đương và thu được kết quả như sau:

$$l_5 = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 + 1 - \sqrt{1-4x\arctan x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-4x\arctan x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{x^2} = 3.$$

Ví dụ 6. Tính giới hạn sau:

$$l_6 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{x^2}.$$

Phân tích: Đây là giới hạn dạng hiệu hai *VCB*. Tuy nhiên, nếu tách thành hiệu hai giới hạn thì các giới hạn đó không tồn tại nên không thực hiện như Ví dụ 5 được. Nếu thay *VCB* tương đương vào hiệu ta sẽ thu được:

$$e^x - 1 - xe^x \sim x - xe^x = x(1-e^x) \sim -2x^2$$

suy ra $l_6 = -2$ (đây là kết quả sai).

Giải: Sử dụng quy tắc L'hospital, ta có

$$l_6 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^x - xe^x}{2x} = -\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Nhận xét 4. Quy tắc L'hospital cũng là một công cụ để khử dạng vô định 0/0. Đặc biệt khi gặp các giới hạn dạng tổng, hiệu các *VCB* như Ví dụ 6. Tuy nhiên, khi gặp giới hạn mà các *VCB* chứa trong hàm hợp thì quy tắc L'hospital sẽ gặp khó khăn. Do vậy, ta cần có sự kết hợp giữa phương pháp thay *VCB* tương đương và quy tắc L'hospital để phát huy thế mạnh của từng phương pháp trong việc khử dạng vô định 0/0.

Ví dụ 7. Tính giới hạn sau:

$$l_7 = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2\tan x + \cos 2x} - 1\right)\arctan x}{x - \tan x}.$$

Phân tích: Nếu sử dụng quy tắc L'hospital để giải bài toán này thì ta sẽ gặp khó khăn khi tính đạo tử số. Nếu sử dụng phương pháp thay thế *VCB* tương đương thì mẫu số là hiệu hai *VCB* nên không thay thế được. Do vậy, ta sẽ kết hợp hai phương pháp trên vào giải bài toán này như sau:

Giải: Sử dụng thay thế *VCB* tương đương, ta có

$$\left(\sqrt[3]{x^2\tan x + \cos 2x} - 1\right)\arctan x = \left(\sqrt[3]{1 - 2\sin^2 x + x^2\tan x} - 1\right)\arctan x \sim \frac{1}{3}\left(-2\sin^2 x + x^2\tan x\right)x \sim -\frac{2}{3}x^3.$$

Suy ra

$$l_7 = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \tan x}.$$

Áp dụng quy tắc L'hospital, ta thu được

$$l_7 = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{-\tan^2 x} = 2.$$

b. Sai lầm khi thay VCB bên trong một hàm số

Theo Nhận xét 3 thì khi $\alpha(x) \sim \beta(x)$ nói chung không suy ra $f(\alpha(x)) \nsim f(\beta(x))$ với f là hàm số nào đó. Do đó, trong quá trình tính giới hạn, nếu ta thay *VCB* tương đương bên trong một hàm số nào đó sẽ dẫn đến kết quả sai.

Ví dụ 8. Tính giới hạn sau:

$$l_8 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\ln(1 + x\sin x)}{x^2}\right).$$

Phân tích: Nếu ta thay *VCB* tương đương như sau:

$$\ln(1 + x\sin x) \sim x\sin x, \tag{4}$$

vào l_8 thì ta thu được giới hạn

$$l_8 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6}.$$

Kết quả này không đúng vì theo Nhận xét 3 thì từ (4) không suy ra được

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x\sin x)}{x^2}\right) \sim \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Giải: Sử dụng phương pháp thay *VCB* tương đương ta thu được

$$l_8 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\ln(1+x\sin x)-x^2}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\sin x)-x^2}{x^4}.$$

Áp dụng quy tắc L'hospital ta thu được kết quả $l_8 = -2/3.$

Ví dụ 9. Tính giới hạn sau:

$$l_9 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{\pi x^2}{\sqrt{1+2x\tan x}-1}\right).$$

Phân tích: Tương tự Ví dụ 8, nếu ta thay *VCB* tương đương như sau: từ

$$\sqrt{1+2x\tan x}-1 \sim x\tan x,$$

suy ra

$$\sin\left(\frac{\pi x^2}{\sqrt{1+2x\tan x}-1}\right) \sim \sin\left(\frac{\pi x}{\tan x}\right). \quad (5)$$

Do đó, ta có

$$l_9 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{\pi x}{\tan x}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Kết quả này sai vì (5) không đúng. Kết quả đúng là $l_9 = -\pi/6.$

5.Kết luận

Bài báo đã vận dụng quy luật trao đổi hàng hoá của cuộc sống vào tính giới hạn của hàm số thông qua việc thay thế các *VCB* bằng hàm luỹ thừa để đưa các giới hạn về giới hạn đơn giản (2). Bài báo giới thiệu một số phương pháp để khắc phục các bài toán có chứa tổng, hiệu các *VCB* mà khôngsử dụng phương pháp thay thế *VCB* tương đương. Tuy nhiên, trường hợp này ta cũng có thể sử dụng phương pháp thay thế *VCB* tương đương nhưng phải là *VCB* tương đương bậc cao hơn ví dụ như: $x-\tan x \sim -x^3/3.$ Vấn đề này sẽ được chúng tôi đề cập đến trong một nghiên cứu tiếp theo. Đặc biệt, bài báo đã chỉ ra một số sai lầm khi sử dụng phương pháp thay thế *VCB* tương đương. Đây thực sự là những điều tâm đắc của chúng tôi vì trong quá trình giảng dạy có khá nhiều sinh viên mắc phải những sai lầm này dẫn đến sai kết quả.

Ghi chú: Các giới hạn trong bài báo được tình bằng phần mềm Maple 17.

Tài liệu tham khảo

[1]. Đ. C. Khanh (2000), Giải tích một biến, NXB ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

[2]. T. X. Tiên, Đ. N Dục (2004), Toán cao cấp - Phần giải tích, NXB Đà Nẵng.

[3]. L. V. Tư, (2001), Tiền tệ, ngân hàng, thị trường tài chính, NXB Thống kê.

[4]. V. Tuấn (2011), Giáo trình giải tích toán học, T1, NXB Giáo dục Việt Nam.

APPLYING INFINITESIMAL EQUIVALENCE IN CALCULATION OF FUNCTION LIMITS

Abstract: Many problems of analytical mathematics lead to calculation of limits of a function. Therefore, the calculation of limits of a function has attracted much attention of mathematicians. Only when it is in anamorphous form does the calculation of the limits of a function appear really difficult to be solved. Among amorphous forms, the 0/0 amorphous one is the most common and important, ~~for~~ most of other amorphous forms can be converted into 0/0. The nature of the 0/0 amorphous form is comparison between two infinitesimal quantities.In this article, we have chosen the exponential function as an intermediary infinitesimal quantity, whereby instead of comparing two infinitesimals together, we are to compare them with the above infinitesimal intermediary. Thus, we move from the problem of comparing two infinitesimals to the one of comparing two exponential functions, which already has its own solution; therefore, we can obtain the results of the initial problem.

Key words: infinitesimal;infinitesimal equivalence;infinitesimal comparison; limits of functions; amorphous form reduction; method of calculating limits.