UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

MÔĐUN BẤT BIẾN QUA CÁC ĐỒNG CẤU LŨY ĐẲNG

Phan Thế Hải[a], Trương Công Quỳnh[b*], Lê Thị Thành[b]

Nhận bài:
27 – 12 – 2016
Chấp nhận đăng:
16 – 03 – 2017
http://jshe.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Cho *M* là một $R-$môđun. Một đặc trưng quan trọng của môđun tựa nội xạ đã được đưa ra, đó là: Môđun *M* là tựa nội xạ khi và chỉ khi $f(M) \le M$ với mọi đồng cấu *f* của bao nội xạ của *M*. Hơn nữa, trong thời gian gần đây, môđun bất biến đẳng cấu (*M* được gọi là môđun bất biến đẳng cấu nếu $f(M) \le M$ với mọi tự đẳng cấu *f* của bao nội xạ của môđun *M*) cũng được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều tác giả. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ đưa ra một số tính chất của môđun *M* mà mọi môđun con *N* của nó là bất biến qua các phần tử lũy đẳng của *End(M).*

Từ khóa: môđun; bất biến; lũy đẳng; bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng; nội xạ.

1. Giới thiệu

Cho *M* là một $R-$môđun. Một môđun con *K* của *M* được gọi là bất biến trong *M* nếu $f(K) \le K$ với mọi đồng cấu *f* của *End(M)*. Trong lý thuyết môđun, khái niệm môđun nội xạ là một trong những khái niệm có ý nghĩa sâu sắc nhất, khái niệm này được Baer đề xuất vào năm 1940. Theo đó, một môđun *M* được gọi là *N*-nội xạ nếu với mỗi môđun con *A* của *N* thì mọi đồng cấu $f: A \to M$ đều mở rộng được đến đồng cấu $g: N \to M$. Môđun M được gọi là nội xạ nếu *M* là *N*-nội xạ với mọi môđun *N*. Vào năm 1961, trong [4], các tác giả Johnson và Wong đã đề xuất một khái niệm mở rộng thực sự của môđun nội xạ, đó là môđun tựa nội xạ. Môđun *M* được gọi là tựa nội xạ nếu *M* là *M*-nội xạ. Không chỉ đề xuất khái niệm môđun tựa nội xạ, các tác giả trên còn đưa ra được một đặc trưng quan trọng của môđun tựa nội xạ liên quan đến tính chất bất biến, đó là: Môđun *M* là tựa nội xạ khi và chỉ khi nó bất biến trong bao nội xạ *E(M)* của nó. Trong [1], các tác giả Camillo, Khurana, Lam, Nicholson và Zhou đã chứng minh được rằng, vành các tự đồng cấu của một môđun nội xạ là vành clean, tức là mỗi phần tử của nó là tổng của một phần tử lũy đẳng và một phần tử đẳng cấu. Do vậy, một môđun là tựa nội xạ khi và chỉ khi nó bất biến qua các đẳng cấu và bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng của bao nội xạ của nó. Một câu hỏi được đặt ra ở đây là: Nếu một môđun là bất biến qua các đẳng cấu hoặc bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng của bao nội xạ của nó thì nó có những đặc trưng gì? Trong những năm 70 của thế kỷ trước, các tác giả Jeremy, Takeuchi, Mohammed và Bouhy đã đưa ra các khái niệm về môđun C1, môđun C2 và môđun C3. Một môđun *M* được gọi là *môđun C1* nếu mỗi môđun con của nó đều cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của *M*. Môđun *M* được gọi là *môđun C2* nếu mọi môđun con của *M* mà đẳng cấu với hạng tử trực tiếp của *M* thì nó cũng là hạng tử trực tiếp của *M*. Môđun *M* được gọi là *môđun C3* nếu hai hạng tử trực tiếp của *M* là *A* và *B* thỏa mãn $A \cap B = 0$ thì $A \oplus B$ cũng là hạng tử trực tiếp của *M*. Môđun *M* được gọi là *tựa liên tục* nếu nó đồng thời là môđun C1 và môđun C3. Vào năm 1974, trong [3], Jeremy đã chứng minh được rằng, môđun *M* là tựa liên tục khi và chỉ khi nó bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng của bao nội xạ *E(M)* của nó. Vào năm 2013, trong [5], các tác giả T.K. Lee và Y. Zhou đã xem xét lớp môđun bất biến qua các đẳng cấu của bao nội xạ của nó, đó là môđun bất biến đẳng cấu. Lớp môđun này đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu từ 2013 cho đến nay. Đặc biệt, các tác giả Er, Singh và Srivastava đã chứng minh được rằng, lớp môđun bất biến đẳng cấu và lớp môđun giả nội xạ là trùng nhau. Việc nghiên cứu một môđun con của môđun *M* bất biến

[a]*Trường Cao đẳng Sư phạm Bà Rịa - Vũng Tàu*
[b]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*
*** Liên hệ tác giả**
Trương Công Quỳnh
Email: tcquynh@ued.udn.vn

qua các đồng cấu lũy đẳng của vành các tự đồng cấu *End(M)* đã được Fuchs xem xét lần đầu tiên vào năm 1970. Theo đó, một môđun con *N* của *M* được gọi là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng nếu $f(N) \leq N$ với mọi phần tử lũy đẳng của *End(M)*. Hiển nhiên ta có, nếu *N* là môđun con bất biến trong *M* thì *N* là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng. Trong [7, Example 4.99], các tác giả A.Tercan và C. Yucel đã đưa ra các ví dụ để chứng tỏ tồn tại một môđun con *N* của *M* là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng nhưng *N* không là môđun con bất biến trong *M*. Từ năm 1970 cho đến nay, việc nghiên cứu các môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng là không nhiều, một số ít kết quả nổi bật về môđun này đã được các tác giả A.Tercan và C. Yucel nêu ra trong [7], chẳng hạn, nếu *M* là môđun nội xạ thì tất cả các môđun con bất biến của *M* là tựa nội xạ và tất cả các môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng của *M* là tựa liên tục.

Mục đích nghiên cứu của chúng tôi trong bài báo này là nghiên cứu các tính chất nội tại của môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng cũng như mối liên hệ của môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng với các lớp môđun quen thuộc khác trong lý thuyết vành và môđun.

Cơ sở lý thuyết: Dựa vào các kiến thức cơ bản của vành và môđun để nghiên cứu các cấu trúc của các lớp vành và mô đun liên quan.

Phương pháp nghiên cứu: Dựa vào phạm trù Mod-R để nghiên cứu các kết quả liên quan của bài báo.

2.Kết quả và đánh giá

2.1. Kết quả

Trong toàn bộ bài báo, vành R được xét là vành kết hợp có phần tử đơn vị và tất cả các $R-$môđun là môđun phải unita. Chúng tôi ký hiệu M_R để chỉ M là $R-$môđun phải. Với N là môđun con của M, chúng tôi dùng các ký hiệu $N \leq M$ ($N < M$), $N \leq^{\oplus} M$ và $N \leq^{e} M$ để ký hiệu N là môđun con của M (tương ứng, môđun con thực sự), N là hạng tử trực tiếp của M và N là môđun con cốt yếu của M.

Định nghĩa 2.1. Môđun *M* được gọi là *bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng* nếu mọi môđun con của *M* là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Ví dụ 2.2. Mỗi môđun không phân tích được là một môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng vì các đồng cấu lũy đẳng của nó chỉ là đồng cấu không và đồng cấu đồng nhất. Chẳng hạn, với Z là vành các số nguyên thì $Z-$môđun Z là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Ví dụ 2.3. Cho Z là vành các số nguyên, xét $Z-$môđun Z_6. Tất cả các hạng tử trực tiếp của môđun này là 0, Z_6, $\frac{2Z}{6Z}$ và $\frac{3Z}{6Z}$. Do đó, $Z-$môđun Z_6 là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng. Tuy nhiên, $Z-$môđun Z_6 không nội xạ vì nó là môđun không chia được.

Ví dụ 2.4. Cho *K* là một trường. Đặt $R=\begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ và $M=\begin{pmatrix} K & K \\ K & K \end{pmatrix}$. Khi đó, M_R là một môđun nội xạ. Tuy nhiên, nếu xét *R*-đồng cấu *e :* $\begin{pmatrix} K & K \\ K & K \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} K & K \\ K & K \end{pmatrix}$ được xác định bởi $e\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ thì ta có $e^2 = e$ và $e\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}R$. Vì vậy, M_R không phải là môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Nhận xét 2.5. Từ các Ví dụ 2.3 và 2.4, ta có lớp môđun nội xạ và lớp môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng là khác nhau.

Ví dụ 2.6. Cho $V = uF \oplus wF$ là một không gian vectơ 2-chiều trên trường *F*. Đặt $R=\left\{\begin{pmatrix} a & v \\ 0 & a \end{pmatrix} / a \in F, v \in V\right\}$. Khi đó, *R* là một vành giao hoán. Xét $e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $M = eR = \begin{pmatrix} F & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Theo [6, tr.10], ta có *M* không phải là môđun *C1*. Tuy nhiên, vì môđun M_R là không phân tích được nên nó là môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một dấu hiệu nhận biết về môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng như sau:

Bổ đề 2.7. *Cho M là một R-môđun. Khi đó, M là một môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng khi và chỉ khi với bất kì tự đồng cấu lũy đẳng f của M và với mỗi phần tử* $m \in M$ *, tồn tại* $r \in R$ *sao cho f(m) = mr.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$). Giả sử *M* là một môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng, $m \in M$ và *f* là một tự đồng cấu lũy đẳng của *M*. Khi đó, vì $f(mR) \le mR$ nên tồn tại $r \in R$ sao cho *f(m) = mr*.

($\Leftarrow$). Giả sử *N* là một môđun con bất kỳ của *M* và *f* là một tự đồng cấu lũy đẳng của *M*. Khi đó, theo giả thiết, với mọi $n \in N$, tồn tại $r \in R$ sao cho *f(n) = nr*. Vì $nr \in N$ nên $f(N) \le N$. Do vậy, *M* là một môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Đối với tất cả các lớp môđun đã được đề cập trong các ví dụ nêu trên và nhiều lớp môđun khác thì hạng tử trực tiếp luôn có tính chất di truyền. Đối với môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng thì chúng tôi cũng chứng được môđun con của nó có tính chất di truyền thể hiện trong bổ đề dưới đây:

Bổ đề 2.8. *Mỗi hạng tử trực tiếp của một môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.*

Chứng minh. Giả sử $M = N \oplus N'$ và $f : N \to N$ là một đồng cấu lũy đẳng. Đặt $\varphi = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in End(M)$. Khi đó, φ là một tự đồng cấu lũy đẳng của *M*. Theo giả thiết, ta có $\varphi(H) \le H$ với mọi $H \le N$. Do đó, $f(H) \le H$ với mọi $H \le N$. Điều này chứng tỏ *N* là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Tiếp theo là một tính chất của môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Mệnh đề 2.9. *Cho N là một môđun con của M. Khi đó các điều kiện sau đây là tương đương:*

(1) N là một môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

(2) $e(N) = e(M) \cap N$ *với mọi đồng cấu lũy đẳng* $e \in End(M)$.

Chứng minh. $(1) \Rightarrow (2)$. Vì *N* là một môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng nên $e(N) \le N$. Do $e(N) \le e(M)$ nên $e(N) \le e(M) \cap N$. Mặt khác, nếu $x \in e(M) \cap N$ thì $\begin{cases} x \in e(M) \\ x \in \cap N \end{cases}$. Khi đó, tồn tại $y \in M$ để $e(y) = x \in N$. Suy ra $x = e(y) = e^2(y) = e(x) \in e(N)$. Điều này chứng tỏ $e(M) \cap N \le e(N)$ và do đó, $e(N) = e(M) \cap N$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Vì $e(N) = e(M) \cap N$ với mọi đồng cấu lũy đẳng $e \in End(M)$ nên $e(N) \le N$ với mọi đồng cấu lũy đẳng $e \in End(M)$ hay *N* là một môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Sau đây, chúng tôi giới thiệu và chứng minh một số tính chất liên quan đến mối liên hệ giữa các môđun con của một môđun M với môđun M. Trước hết là kết quả liên quan đến môđun con hữu hạn sinh.

Mệnh đề 2.10. *Cho M là một môđun. Nếu mỗi môđun con hữu hạn sinh của M là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng thì M cũng vậy.*

Chứng minh. Cho $f : M \to M$ là một đồng cấu lũy đẳng và $m \in M$. Đặt $N = mR + f(m)R$. Khi đó, *N* là một môđun con hữu hạn sinh của *M*. Nếu $n \in N$ thì $n = mr_1 + f(m)r_2$. Suy ra $f(n) =$

$f(mr_1) + f^2(m)r_2 = f(m)(r_1 + r_2) \in N$

$f(n) = f(mr_1) + f^2(m)r_2 = f(m)(r_1 + r_2) \in N$

$f(n) = f(mr_1) + f^2(m)r_2 = f(m)(r_1 + r_2) \in N$ hay $f(N) \le N$. Do đó, hạn chế của *f* trên *N* là đồng cấu lũy đẳng. Theo giả thiết, ta có $f(m) \in mR$. Vì vậy, theo Bổ đề 2.7, ta có *M* là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Mệnh đề 2.11. *Một môđun con là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng nếu nó là giao của một họ các môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng hoặc nó được sinh bởi một họ các môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.*

Chứng minh. Cho *M* là một R-môđun và $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ trong đó các N_i là môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng. Nếu $n \in N$ thì $n \in N_i$ với mọi $i \in I$. Giả sử $e^2 = e \in End(M)$. Vì mỗi N_i là môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng nên $e(n) \in N_i$ với mọi $i \in I$. Do đó, $e(n) \in \bigcap_{i \in I} N_i = N$ và ta có $e(N) \leq N$ hay *N* là môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Bây giờ, giả sử môđun con *N* được sinh bởi họ các môđun con $\{N_i\}$ với $i \in I$. Khi đó, với mọi $n \in N$ thì $n = \sum_{i \in I} n_i$. Nếu $e^2 = e \in End(M)$ thì ta có $e(n) = \sum_{i \in I} e(n_i) \in \sum_{i \in I} e(N_i) = N$ Do đó, $e(N) \leq N$ hay *N* là môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Mệnh đề 2.12. *Nếu M là môđun tựa liên tục và bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng thì mỗi môđun con của M cũng là tựa liên tục và bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.*

Chứng minh. Cho $N \leq M$, $x \in M$ và $f : N \to N$ là một đồng cấu lũy đẳng. Vì *M* là tựa liên tục nên f mở rộng được tới tự đồng cấu lũy đẳng g của *M*. Theo giả thiết, ta có $g(x) \in xR$, do đó $f(x) \in xR$. Theo Bổ đề 2.7, ta có *N* là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Giả sử $h : H \to H$ là một tự đồng cấu lũy đẳng của môđun con H của N. Vì *M* là tựa liên tục nên h mở rộng được tới tự đồng cấu lũy đẳng k của *M*. Mặc khác, ta có $k(N) \leq N$ và $k|_H = h$. Vì vậy, *h* mở rộng được tới tự đồng cấu lũy đẳng của *N*. Do đó, *N* là tựa liên tục.

Mệnh đề 2.13. *Cho R là vành con của vành S và* $R \neq S$. *Nếu* S_R *là môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng thì tập các phần tử đồng cấu lũy đẳng của R và tập các phần tử đồng cấu lũy đẳng của S là trùng nhau.*

Chứng minh. Dễ dàng thấy được tập các phần tử đồng cấu lũy đẳng của *R* là tập con của tập các phần tử đồng cấu lũy đẳng của *S*. Ta sẽ chứng minh tập các phần tử đồng cấu lũy đẳng của *S* là tập con của tập các phần tử đồng cấu lũy đẳng của *R*. Thật vậy, giả sử tồn tại một phần tử đồng cấu lũy đẳng $a \in S$ mà $a \notin R$. Ta xét ánh xạ $\varphi : S \to S$ được xác định bởi $\varphi(x) = ax$. Khi đó, φ là một phần tử đồng cấu lũy đẳng của S_R và $\varphi(1) = a \notin R$. Điều này là một mâu thuẫn, do vậy tập các phần tử đồng cấu lũy đẳng của R và tập các phần tử đồng cấu lũy đẳng của S là trùng nhau.

Một môđun *M* được gọi là *môđun chuỗi* nếu mọi môđun con *L* và *N* của *M* thì $L \leq N$ hoặc $N \leq L$.

Cho Z là vành các số nguyên, xét $Z-$môđun Z_6. Theo Ví dụ 2.3, ta có Z_6 là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng. Xét 2 môđun con của Z_6 là $N = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ và $L = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Khi đó, ta có $N \not\leq L$ và $L \not\leq N$. Vì vậy, Z_6 không phải là môđun chuỗi. Tuy nhiên, mọi môđun chuỗi là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng được thể hiện qua mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 2.14. *Mọi môđun chuỗi là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.*

Chứng minh. Giả sử *M* là một môđun chuỗi. Lấy $0 \neq m \in M$ và $f \in End(M)$ sao cho $f^2 = f$ và $f(m) \notin mR$. Vì $mR \leq f(m)R$ nên ta có $m = f(m)r$ với $r \in R$. Suy ra $f(m) - mr \in Ker(f)$. Do $m \neq 0$ và $Ker(f) \leq mR$ nên $f(m) - mr \in mR$, suy ra $f(m) \in mR$ là một mâu thuẫn. Vậy, *M* là môđun chuỗi.

Trong phần giới thiệu, chúng ta đã biết hai khái niệm môđun con bất biến và môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng là không trùng nhau. Định lý sau đây chỉ ra rằng, khi môđun con là hạng tử trực tiếp thì hai khái niệm trên là trùng nhau.

Định lý 2.15. *Cho* $M = M_1 \oplus M_2$ *là tổng trực tiếp của môđun con* M_1, M_2. *Khi đó các điều kiện sau đây là tương đương:*

(1) M_1 *là một môđun con bất biến của M.*

(2) M_1 *là một môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng của M.*

(3) $Hom(M_1, M_2) = 0$.

Chứng minh. $(1) \Rightarrow (2)$. Hiển nhiên.

$(2)\Rightarrow(3)$. Giả sử *M_1 = e(M)* với $e^2=e\in End(M)$. Gọi $f:\ e(M)\to M_2$. Khi đó, ta có $(fe)\big|_{e(M)}=f$. Đặt $\phi=\begin{pmatrix} e & 0\\ f & 0\end{pmatrix}$, ta có ϕ là một tự đồng cấu của *M* và $\phi^2=\phi$.

Vì *e(M)* là môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng của *M* nên $\phi\big(e(M)\big)\le e(M)$. Do đó, $e(M)+fe(M)\le e(M)$ hay $fe(M)=0$. Suy ra *f= 0.*

$(3)\Rightarrow(1)$. Đặt $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{pmatrix}\in End(M)$ trong đó $\varphi_{ij}:M_j\to M_i$. Theo giả thiết ta có $\varphi_{21}=0$ nên $\varphi(M_1)\le M_1$. Do đó, M_1 là môđun con bất biến của *M*. W

Từ Định lý 2.15, chúng tôi thu được một số hệ quả sau đây:

Hệ quả 2.16. *Nếu* $M=\underset{i\in I}{\oplus}M_i$ *là một môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng thì* $Hom(M_i,\ M_j)=0$ *với mọi* $i,\ j\in I$ *và* $i\neq j$.

Một môđun *M* được gọi là *hữu hạn Dedekind hay hữu hạn trực tiếp* nếu *M* không đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp *H* của *M* mà $H\neq M$.

Hệ quả 2.17. *Mọi môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng là hữu hạn trực tiếp.*

Chứng minh. Giả sử $M=A\oplus B$ là một môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng và $B\ ;\ M$. Khi đó, $Hom(A,\ B)=0$ và do đó *A = 0*. Suy ra *B = M*. Vì vậy *M* là hữu hạn trực tiếp. W

Mệnh đề 2.18. *Cho* $M=\underset{i\in I}{\oplus}M_i$ *là một tổng trực tiếp các môđun con* M_i *của M. Nếu N là môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng của M thì* $M=\underset{i\in I}{\oplus}(M_i\cap N)$.

Chứng minh. Vì $M=\underset{i\in I}{\oplus}M_i$ nên tồn tại một họ các đồng cấu lũy đẳng trực giao $\{e_i\}_{i\in I}$ của *End(M)* sao cho $M_i=e_i(M)$. Với bất kì $n\in N$, tồn tại $i_1,i_2,\ldots,i_k\in I$ và $m_{i_1},\ m_{i_2},\ \ldots,\ m_{i_k}\in M$ sao cho $n=e_{i_1}(m_{i_1})+e_{i_2}(m_{i_2})+\ \mathrm{L}\ +e_{i_k}(m_{i_k})$. Hơn nữa, với bất kì $j\in\{1,2,\ldots,\ k\}$, do *N* là một môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng của *M* nên $e_{i_j}(N)\le N$. Vì vậy, $e_{i_j}(n)=e_{i_j}(m_{i_j})\in M_{i_j}\cap N$. Suy ra

$$n=e_{i_1}(m_{i_1})+\mathrm{L}\ +e_{i_k}(m_{i_k})\in\overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}}\big(M_{i_j}\cap N\big).$$ Do đó,

$N\le\underset{i\in I}{\oplus}\big(M_i\cap N\big)\le N$ hay $N=\underset{i\in I}{\oplus}\big(M_i\cap N\big)$.

Từ Mệnh đề 2.18, chúng tôi thu được một số hệ quả sau đây:

Hệ quả 2.19. *Cho* $M=\underset{i\in I}{\oplus}M_i$ *là một tổng trực tiếp các môđun con* M_i *của M. Nếu M là môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng thì* $M=\underset{i\in I}{\oplus}(M_i\cap N)$ *với mọi môđun con N của M.*

Một môđun *M* được gọi là thỏa mãn *tính chất SSP* nếu $K+L$ là một hạng tử trực tiếp của *M* với bất kì các hạng tử trực tiếp *K* và *L* của *M.*

Môđun *M* được gọi là thỏa mãn *tính chất SIP* nếu $K\cap L$ là một hạng tử trực tiếp của *M* với bất kì các hạng tử trực tiếp *K* và *L* của *M.*

Hệ quả 2.20. *Mọi môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng đều thỏa mãn tính chất SIP và SSP.*

Chứng minh. Cho $M=K\oplus K'=L\oplus L'$. Từ Mệnh đề 2.18, ta có $K=(K\cap L)\oplus(K\cap L')$ và $L'=(K\cap L')\oplus(K'\cap L')$. Khi đó, $K\cap L$ là hạng tử trực tiếp của *M* và $K+L=L\oplus(K\cap L')$. Suy ra $M=L\oplus L'=L\oplus(K\cap L')\oplus(K'\cap L')$ $=(K+L)\oplus(K'\cap L')$. Do đó, *M* thỏa mãn tính chất *SIP* và *SSP.*

Trong Định lý dưới đây, khi $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ thì chúng tôi chứng minh được rằng, nếu M_i là môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng với mọi $i \in I$ và $N = \bigoplus_{i \in I}(M_i \cap N)$ với mọi môđun con *N* của *M* thì *M* là một môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Định lý 2.21. *Cho* $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. *Khi đó, các điều kiện sau đây là tương đương:*

(1) M là một môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

(2) M_i *là môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng với mọi* $i \in I$ *và* $N = \bigoplus_{i \in I}(M_i \cap N)$ *với mọi môđun con N của M.*

Chứng minh. $(1) \Rightarrow (2)$. Điều này được suy ra từ Bổ đề 2.8 và Hệ quả 2.19.

$(2) \Rightarrow (1)$ Giả sử $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ thỏa mãn (2). Trước hết ta cần chứng minh $Hom\left(M_i, M_j\right) = 0$ với mọi $i, j \in I, i \neq j$. Thật vậy, với bất kì $i, j \in I, i \neq j$ và $f: M_i \to M_j$. Nếu $m_i \in M_i$ thì theo giả thiết ta có $\left(m_i + f\left(m_i\right)\right)R = \bigoplus_{k \in I}\left(M_k \cap \left(m_i + f\left(m_i\right)\right)R\right)$. Do đó, tồn tại $r_i, r_j \in R$ sao cho $m_i + f\left(m_i\right) = \left(m_i + f\left(m_i\right)\right)r_i + m_i + \left(f\left(m_i\right)\right)r_j$ với $\left(m_i + f\left(m_i\right)\right)r_i \in M_i;\ m_i + \left(f\left(m_i\right)\right)r_j \in M_j$. Thế thì $m_i = \left(m_i + f\left(m_i\right)\right)r_i$ và do vậy $m_i = m_i r_i$ và $f\left(m_i\right)r_i = 0$. Suy ra $f\left(m_i\right) = 0$ hay vậy $f = 0$. Giả sử $\varphi: M \to M$ là một đồng cấu lũy đẳng của *M* và *N* là một môđun con của *M*. Thế thì $N = \bigoplus_{i \in I}\left(M_i \cap N\right)$ và $\varphi(N) = \sum_{i \in I}\varphi(M_i \cap N)$. Mặc khác, từ giả thiết, ta có thể viết φ như một ma trận $\varphi = \left(\varphi_{ij}\right)_{I \times I}$ với $\varphi_{ij}: M_j \to M_i$ và $\varphi_{ij} = 0$ với mọi $i, j \in I, i \neq j$. Khi đó, $\varphi^2 = \varphi, \varphi_{ii}^2 = \varphi_{ii}$ với mọi $i \in I$. Suy ra $\varphi_{ii}\left(M_i \cap N\right) \leq M_i \cap N$ và do đó $\varphi\left(M_i \cap N\right) \leq M_i \cap N$ với mọi $i \in I$. Vì vậy, $\varphi\left(N\right) = \sum_{i \in I}\varphi(M_i \cap N) \leq N$.

2.2. Đánh giá

Bài báo đã chỉ ra được một số tính chất cơ bản mới của môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng. Đồng thời, mối liên hệ giữa môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng và một số lớp môđun quen thuộc khác trong lý thuyết vành và môđun cũng đã được bài báo chỉ ra.

3.Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu lớp môđun *M* mà mọi môđun con của nó là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng của *M*. Lớp môđun này và lớp môđun nội xạ là khác nhau (Nhận xét 2.5). Mối liên hệ của một môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng với các môđun con của nó được chúng tôi nghiên cứu trong Mệnh đề 2.10, Mệnh đề 2.11 và Mệnh đề 2.12. Ngoài ra, mối quan hệ giữa môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng với các lớp môđun khác cũng được chúng tôi đưa ra trong bài báo này. Chẳng hạn, mọi môđun chuỗi là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng (Mệnh đề 2.14). Như trong phần giới thiệu đã đề cập, đối với một môđun *M* bất kỳ thì một môđun bất biến của *M* là bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng nhưng điều ngược lại thì không phải bao giờ cũng đúng. Điều này thúc đẩy chúng tôi quan tâm đến điều kiện khi nào thì một môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng là môđun con bất biến. Kết quả trong Định lý 2.15 đã chỉ ra rằng, khi M_1 là hạng tử trực tiếp của *M* thì M_1 là môđun con bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng khi và chỉ khi M_1 là môđun con bất biến của *M*. Cũng từ Định lý 2.15, chúng tôi thu được một số hệ quả như: mọi môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng là hữu hạn trực tiếp (Hệ quả 2.17) hay mọi môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng đều thỏa mãn tính chất SIP và SSP (Hệ quả 2.20).

Khi nghiên cứu về một lớp môđun thỏa mãn tính chất *C* nào đó, người ta thường quan tâm đến tổng trực tiếp của các môđun thỏa mãn tính chất *C* có là một môđun thỏa mãn tính chất *C* hay không. Trong Định lý 2.21, khi $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ thì chúng tôi chứng minh được rằng, nếu M_i là môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng với mọi $i \in I$ và $N = \bigoplus_{i \in I}(M_i \cap N)$ với mọi môđun con N của M thì M là một môđun bất biến qua các đồng cấu lũy đẳng.

Tài liệu tham khảo

[1] Camillo, V. P., Khurana. D., Lam, T. Y., Nicholson, W. K. and Zhou, Y. (2006), Continuous modules are clean, J. Al gebra, 304(1), pp.94-111.

[2] Fuchs, L. (1970), Infinite Abelian Groups, vol. I, Pure Appl. Math., Ser. Monogr. Textb., vol. 36, Academic Press, New York, San Francisco, London.

[3] Jeremy, L., (1974), Modules et anneaux quasi-continus, Can. Math. Bull. 17, pp.217-228.

[4] Johnson, R. E. and Wong, E. T., (1961), Quasi-injective modules and irreducible rings, J. London Math. Soc. 36, pp.260-268.

[5] Lee, T.K., and Zhou. Y., (2013), Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls, J. Algebra Appl, 12, (2).

[6] Nicholson, W.K., Yousif, M. F. (2003), Quasi-Frobenius Rings. Cambridge Univ. Press.

[7] Tercan, A., Yucel. A., (2016), Module Theory, Extending Modules and Generalizations. Published by Birkhauser Verlag AG, Switzerland.

MODULES INVARIANT UNDER IDEMPOTENT HOMOMORPHISMS

Abstract: Let *M* be a right R-module. A quasi-injective module is characterized as follows: a module *M* is quasi-injective if and only if $f(M) \leq M$ for any endomorphism *f* of the injective hull of the module *M*. Moreover, recently, automorphism-invariant modules (*M* is said to be automorphism-invariant if $f(M) \leq M$ for any automorphism *f* of the injective hull of *M)* have been a research focus for many authors. In this article, we present some properties of module *M* of which every submodule *N* is invariant via idempotent elements of *End(M).*

Key words: module; invaraint; idempotent; projection-invariant; injective