UED Journal of Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

TÍNH TRẮC ĐỊA CỦA CÁC ĐỒ THỊ

Lương Quốc Tuyển[a*], Lê Thị Thu Nguyệt[a]

Nhận bài:
01 – 10 – 2016
Chấp nhận đăng:
28 – 11 – 2016
http://jshe.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Trong bài báo này, trước tiên chúng tôi chứng minh được rằng chiều dài của một đường đi tuyến tính từng khúc bất kỳ trong một không gian metric *X* là không phụ thuộc vào các phép phân hoạch π của đoạn [a,b], và các ánh xạ affine c_k xác định trên đoạn $[t_k, t_{k+1}]$. Sau đó, chúng tôi chứng minh rằng với hai điểm *x* và *y* bất kỳ trong một không gian metric *X*, luôn tồn tại một đường đi tuyến tính từng khúc nối *x* với *y*. Hơn nữa, chúng tôi đã chứng tỏ rằng công thức: d(x,y) = inf {l(c): c là một đường đi tuyến tính từng khúc nối x với y} là một metric trên *X*. Cuối cùng, chúng tôi đã chứng minh được một kết quả rằng, với metric được xác định như trên, (*X*,*d*) là một không gian metric trắc địa.

Từ khóa: đồ thị; không gian metric; không gian metric trắc địa; đường trắc địa; đường đi tuyến tính từng khúc; ánh xạ affine.

1. Giới thiệu

Lý thuyết nhóm hình học được nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm từ những năm 90 của thế kỷ trước đến nay. Qua đó, các nhà toán học đã thu được rất nhiều kết quả liên quan đến không gian metric trắc địa và không gian metric hyperbolic. Đặc biệt, trong [1], các tác giả đã xây dựng đồ thị và đã thu được một số kết quả đẹp trên không gian metric.

Trong bài báo này, trước tiên chúng tôi chứng minh rằng chiều dài của một đường đi tuyến tính từng khúc bất kỳ trong một không gian metric *X* là không phụ thuộc vào các phép phân hoạch π của đoạn [*a*, *b*] và các ánh xạ affine c_k. Tiếp theo, chúng tôi chứng minh rằng với hai điểm *x* và *y* bất kỳ trong một không gian metric *X*, luôn tồn tại một đường đi tuyến tính từng khúc nối *x* với *y*. Qua đó, chúng tôi đã xây dựng được một metric *d* trên *X* mà (*X*,*d*) là một không gian metric trắc địa.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lý thuyết

2.1.1. Không gian metric trắc địa

Cho (X,d) là một không gian metric và $x,y\in X$. Ta nói rằng một *đường trắc địa nối* x,y trong X là một ánh xạ

$$c:[0,l]\to X \quad (l\geq 0)$$

thỏa mãn

$$c(0)=x,\ c(l)=y,$$

$$|c(t)-c(t')|=|t-t'| \text{ với mọi } t,t'\in[0,l].$$

Từ đây ta cũng suy ra được rằng $d(x,y)=l$ và c là ánh xạ liên tục.

Mỗi không gian metric trắc địa là một không gian metric mà với bất kỳ hai phần tử của nó đều có một đường trắc địa nối chúng.

Nhận xét.

- Nếu $c:[0,l]\to X$ là một đường trắc địa nối $x,y,$ thì

$$c':[0,l]\to X$$
$$t \mapsto c'(t)=c(l-t)$$

cũng là một đường trắc địa nối $y,x.$

- Với mỗi phần tử x của một không gian metric (X,d) luôn có đường trắc địa nối x,x là ánh xạ hằng.

Tia trắc địa là một tập con của một không gian metric mà nó đẳng cự với $[0,+\infty)$.

2.1.2. Đồ thị

[a]*Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng*
*** Liên hệ tác giả**
Lương Quốc Tuyển
Email: lqtuyen@ued.udn.vn

Đồ thị là một tổ hợp G gồm hai tập hợp, V được gọi là *tập các đỉnh* và E được gọi là *tập các cạnh* mà tồn tại các ánh xạ

$$\partial_0 : E \to V, \, \partial_1 : E \to V$$

sao cho $V = \partial_0(E) \cup \partial_1(E).$

Ta sẽ gán mỗi đồ thị G với một tập X_G còn gọi tắt là X như sau:

Cho tập $E \times [0,1],$ ta xác định một quan hệ R trên đó như sau: Với mọi $(e,t),\ (e',t') \in E \times [0,1],$ ta có

$$(e,t)R(e',t') \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(e,t)R(e',t')\\ \partial_t(e) = \partial_{t'}(e')\end{array}\right.$$

trong đó $t, t' \in \{0,1\}$. Rõ ràng rằng đây là một quan hệ tương. Ta đặt $X = (E \times [0,1])/R,$ và xét ánh xạ

$$\begin{aligned} p : E \times [0,1] &\to X \\ (e,t) &\mapsto [(e,t)]. \end{aligned}$$

Bây giờ, với mọi $e \in E,$ ta xét

$$\begin{aligned} f_e : [0,1] &\to X \\ t &\mapsto p(e,t). \end{aligned}$$

Khi đó, ta thấy rằng f_e là đơn ánh trên $(0,1)$. Ngoài ra, nếu $f_e(0) = f_e(1),$ thì e được gọi là một *loop*.

Giả sử $v \in V.$ Khi đó, $v \in \partial_0(E) \cup \partial_1(E).$ Suy ra tồn tại $e \in E$ sao cho $\partial_0(e) = v$ hoặc tồn tại $e' \in E$ sao cho $\partial_1(e') = v.$

Nhận xét. Giả sử $\Phi : V \to X$ được xác định như sau: nếu tồn tại $e \in E$ sao cho $\partial_0(e) = v,$ thì $\Phi(v) = p(e,0)$, và nếu tồn tại $e^* \in E$ sao cho $\partial_1(e^*) = v,$ thì $\Phi(v) = p(e^*,1).$ Khi đó, Φ được xác định đúng đắn và đơn ánh. Như vậy, ta đồng nhất mỗi $v \in V$ với $\Phi(v) \in X$ và có thể xem V như là một tập con của X.

Giả sử $a < b.$ Ta nói $f : [a,b] \to R$ là *ánh xạ affine* nếu với mọi $u, v \in [a,b],$ với mọi $t \in [0,1],$ ta có

$$f\left[(1-t)u + tv\right] = (1-t)f(u) + tf(v).$$

Ta nhận thấy rằng $f : [a,b] \to R$ là ánh xạ affine khi và chỉ khi tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f(u) = \alpha u + \beta, \forall u \in [a,b],$$

khi và chỉ khi với mọi $t \in [0,1],$ ta có

$$f\left[(1-t)a + tb\right] = (1-t)f(a) + tf(b).$$

Mỗi ánh xạ $c : [a,b] \to X\ (a < b)$ được gọi là một *đường đi tuyến tính từng khúc* nếu tồn tại phép phân hoạch $\pi = \{t_0, ..., t_k, t_{k+1}, ..., t_n\}$ của $[a,b]$ sao cho với mọi $k \in \{0, ..., n-1\},$ tồn tại $e_k \in E$ và tồn tại

$$c_k : [t_k, t_{k+1}] \to [0,1]$$

là ánh xạ affine sao cho

$$c|_{[t_k, t_{k+1}]} = f_{e_k} \circ c_k.$$

Giả sử $c : [a,b] \to X\ (a < b)$ là đường đi tuyến tính từng khúc, và $\pi = \{t_0, ..., t_k, t_{k+1}, ..., t_n\}$ là một phép phân hoạch của $[a,b]$ sao cho với mọi $k \in \{0, ..., n-1\},$ tồn tại $e_k \in E,$ và $c_k : [t_k, t_{k+1}] \to [0,1]$ là ánh xạ affine sao cho $c|_{[t_k, t_{k+1}]} = f_{e_k} \circ c_k$. Ta đặt

$$l(c) = \sum_{k=0}^{n-1} | c_k(t_k) - c_k(t_{k+1}) |.$$

Khi đó, $l(c)$ được gọi là *độ dài của đường đi tuyến tính từng khúc* c.

Giả sử $x, y \in X$ và $c : [a,b] \to X\ (a < b)$ sao cho $c(a) = x, c(b) = y.$ Khi đó, ta nói rằng c *nối* x với $y.$

Nhận xét.

- Giả sử $a < b,\ a' < b'$ và $c : [a,b] \to X$ là một đường đi tuyến tính từng khúc, $\alpha : [a',b'] \to [a,b]$ là ánh xạ affine thỏa mãn $\alpha(a') = a,\ \alpha(b') = b.$ Khi đó,

$$c \circ \alpha : [a',b'] \to X$$

cũng là đường đi tuyến tính từng khúc và $l(c \circ \alpha) = l(c).$

- Giả sử $a < b < b'$ và $c : [a,b] \to X$, $d : [b,b'] \to X$ là các đường đi tuyến tính từng khúc thỏa mãn $c(b) = d(b).$ Ta đặt $e : [a,b'] \to X$ được xác định bởi

$$e(t) = \begin{cases} c(t), & t \in [a,b], \\ d(t), & t \in [b,b']. \end{cases}$$

Bởi vì $c(b) = d(b)$ nên e được xác định đúng đắn. Hơn nữa, e là một đường đi tuyến tính từng khúc và

$l(e)=l(c)+l(d)$. Khi đó, e được gọi là *đường đi tuyến tính từng khúc nối* c,d.

- Giả sử $a<b$ và $c:[a,b]\to X$ là một đường đi tuyến tính từng khúc,

$$\bar{c}:[a,b]\to X$$
$$t\mapsto \bar{c}(t)=c(a+b-t).$$

Khi đó, $\bar{c}$ là một đường đi tuyến tính từng khúc và $l(\bar{c})=l(c)$.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết trong quá trình thực hiện bài báo. Nghiên cứu các tài liệu của những tác giả đi trước, làm yếu giả thiết để thu được kết quả tổng quát hơn.

3.Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

3.1.1.Định lí. *Giả sử* $a<b$ *và* $c:[a,b]\to X$ *là một đường đi tuyến tính từng khúc. Khi đó,* $l(c)$ *không phụ thuộc vào phép phân hoạch* π *và các ánh xạ affine* c_k.

Chứng minh. Phép chứng minh được thực hiện theo các bước như sau.

Bước 1. Giả sử $\pi=\{t_0,...,t_k,t_{k+1},...,t_n\}$ là một phân hoạch bất kỳ của $[a,b]$, và giả sử với mọi $k\in\{0,...,n-1\}$, tồn tại $e_k,e'_k\in E$ và tồn tại $c_k,c'_k:[t_k,t_{k+1}]\to[0,1]$ là các ánh xạ affine sao cho

$$c|_{[t_k,t_{k+1}]}=f_{e_k}\circ c_k,\ c|_{[t_k,t_{k+1}]}=f_{e'_k}\circ c'_k.$$

Ta sẽ chỉ ra rằng

$$\sum_{k=0}^{n-1}|c_k(t_k)-c_k(t_{k+1})|=\sum_{k=0}^{n-1}|c'_k(t_k)-c'_k(t_{k+1})|.$$

Thật vậy, với mọi $k\in\{0,...,n-1\}$, giả sử c_k là hằng trên $[t_k,t_{k+1}]$ và c'_k không là hằng trên $[t_k,t_{k+1}]$. Khi đó, vì mỗi ánh xạ affine là liên tục và c'_k có các giá trị thuộc $[0,1]$ nên với mọi $t\in(t_k,t_{k+1})$, tồn tại $\alpha\in(0,1)$ sao cho $t=(1-\alpha)t_k+\alpha t_{k+1}$. Suy ra

$$c'_k(t)=(1-\alpha)c'_k(t_k)+\alpha c'_k(t_{k+1})\in(0,1).$$

Bởi vì

$$p\left(e_k,c_k(t)\right)=c(t)=p\left(e'_k,c'_k(t)\right)$$

nên $e_k=e'_k, c_k(t)=c'_k(t)$, kéo theo c'_k là ánh xạ hằng. Điều này mâu thuẫn với c'_k không là hằng trên $[t_k,t_{k+1}]$. Như vậy, chỉ xảy ra hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1. c_k,c'_k cùng là ánh xạ không phải là hằng. Khi đó, theo cách lập luận trên ta có $c_k(t)=c'_k(t)$ với mọi $t\in(t_k,t_{k+1})$. Mặt khác, vì các ánh xạ affine đều liên tục nên ta cũng có

$$c_k(t_k)=c'_k(t_k), c_k(t_{k+1})=c'_k(t_{k+1}).$$

Suy ra $|c_k(t_k)-c_k(t_{k+1})|=|c'_k(t_k)-c'_k(t_{k+1})|$.

- Trường hợp 2. c_k,c'_k cùng là ánh xạ hằng. Khi đó,

$$|c_k(t_k)-c_k(t_{k+1})|=0=|c'_k(t_k)-c'_k(t_{k+1})|.$$

Như vậy,

$$\sum_{k=0}^{n-1}|c_k(t_k)-c_k(t_{k+1})|=\sum_{k=0}^{n-1}|c'_k(t_k)-c'_k(t_{k+1})|.$$

Từ kết quả của Bước 1, ta có thể đặt

$$l_\pi(c)=\sum_{k=0}^{n-1}|c_k(t_k)-c_k(t_{k+1})|=\sum_{k=0}^{n-1}|c'_k(t_k)-c'_k(t_{k+1})|.$$

Bước 2. Giả sử π_1,π_2 là hai phân hoạch bất kỳ của của $[a,b]$ mà π_2 mịn hơn π_1. Ta sẽ chỉ ra rằng $l_{\pi_1}(c)=l_{\pi_2}(c)$. Thật vậy, không giảm tổng quát ta có thể giả thiết bổ sung rằng π_2 hơn π_1 một điểm chia, nghĩa là

$$\pi_1=\{t_0,...,t_k,t_{k+1},...,t_n\};\ \pi_2=\{t_0,...,t_k,u,t_{k+1},...,t_n\}.$$

Giả sử rằng với mọi $k\in\{0,...,n-1\}$, tồn tại $e_k\in E$ và $c_k:[t_k,t_{k+1}]\to[0,1]$ là các ánh xạ affine sao cho $c|_{[t_k,t_{k+1}]}=f_{e_k}\circ c_k$. Ta đặt

$$e'_0=e_0, d_0=c_0:[t_0,t_1]\to[0,1],...,$$
$$e'_{k-1}=e_{k-1}, d_{k-1}=c_{k-1}:[t_{k-1},t_k]\to[0,1],$$
$$e'_k=e_k, d'_k=c_k|_{[t_k,u]}:[t_k,u]\to[0,1],$$
$$e''_k=e_k, d''_k=c_k|_{[u,t_{k+1}]}:[u,t_{k+1}]\to[0,1],$$
$$e'_{k+1}=e_{k+1}, d_{k+1}=c_{k+1}:[t_{k+1},t_{k+2}]\to[0,1],...,$$
$$e'_{n-1}=e_{n-1}, d_{n-1}=c_{n-1}:[t_{n-1},t_n]\to[0,1].$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
l_{\pi_1}(c) &= |c_0(t_0)-c_0(t_1)|+\ldots+|c_{k-1}(t_{k-1})-c_{k-1}(t_k)| \\
&\quad +|c_k(t_k)-c_k(t_{k+1})|+|c_{k+1}(t_{k+1})-c_{k+1}(t_{k+2})| \\
&\quad +\ldots+|c_{n-1}(t_{n-1})-c_{n-1}(t_n)| \\
&= |d_0(t_0)-d_0(t_1)|+\ldots+|d_{k-1}(t_{k-1})-d_{k-1}(t_k)| \\
&\quad +|c_k(t_k)-c_k(u)+c_k(u)-c_k(t_{k+1})| \\
&\quad +|d_{k+1}(t_{k+1})-d_{k+1}(t_{k+2})|+\ldots \\
&\quad +|d_{n-1}(t_{n-1})-d_{n-1}(t_n)|.
\end{aligned}
$$

Bởi vì c_k là ánh xạ affine nên nó đơn điệu. Do đó,

$$
\begin{aligned}
&|c_k(t_k)-c_k(u)+c_k(u)-c_k(t_{k+1})| \\
&= |c_k(t_k)-c_k(u)|+|c_k(u)-c_k(t_{k+1})| \\
&= |d'_k(t_k)-d'_k(u)|+|d''_k(u)-d''_k(t_{k+1})|.
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
l_{\pi_1}(c) &= |d_0(t_0)-d_0(t_1)|+\ldots+|d_{k-1}(t_{k-1})-d_{k-1}(t_k)| \\
&\quad +|c_k(t_k)-c_k(u)+c_k(u)-c_k(t_{k+1})| \\
&\quad +|d_{k+1}(t_{k+1})-d_{k+1}(t_{k+2})|\ldots+|d_{n-1}(t_{n-1})-d_{n-1}(t_n)| \\
&= |d_0(t_0)-d_0(t_1)|+\ldots+|d_{k-1}(t_{k-1})-d_{k-1}(t_k)| \\
&\quad +|d'_k(t_k)-d'_k(u)|+|d''_k(u)-d''_k(t_{k+1})| \\
&\quad +|d_{k+1}(t_{k+1})-d_{k+1}(t_{k+2})|\ldots+|d_{n-1}(t_{n-1})-d_{n-1}(t_n)| \\
&= l_{\pi_2}(c).
\end{aligned}
$$

Bước 3. Giả sử π_1,π_2 là các phân hoạch bất kỳ của của $[a,b]$. Ta chọn một phân hoạch π mịn hơn π_1 và π_2. Khi đó, sử dụng kết quả của Bước 2, ta thu được

$$l_{\pi_1}(c)=l_\pi(c)=l_{\pi_2}(c).$$

3.1.2. Định lí. *Với mọi $x,y\in X$, tồn tại một đường đi tuyến tính từng khúc nối x,y.*

Chứng minh. Ta đặt

$$d(x,y)=\inf\{l(c): c \text{ là đường đi tuyến tính từng khúc nối } x,y\}.$$

Khi đó, tồn tại

$$\min\{l(c): c \text{ là đường đi tuyến tính từng khúc nối } x,y\}.$$

Thật vậy, ta đặt

$$A=\{l(c): c \text{ là đường đi tuyến tính từng khúc nối } x,y\}.$$

Ta thấy rằng $A\neq\varnothing$ và $u\geq 0$ với mọi $u\in A$. Hơn nữa, A có phần tử bé nhất. Thật vậy,

Trường hợp 1. $x=y$.

(1.1) Nếu $x=y=p(e,0)$ với e là một phần tử của E, thì ta đặt

$$
\begin{aligned}
c:[0,1]&\to X\\
t&\mapsto p(e,0)
\end{aligned}
$$

và với mọi $t\in[0,1]$, ta đặt $c_1(t)=0$. Khi đó, $c=f_e\circ c_1$. Suy ra $l(c)=|c_1(0)-c_1(1)|=0$. Như vậy, $\min A=0$.

(1.2) Nếu $x=y=p(e,1)$ với e là một phần tử của E, thì ta đặt

$$
\begin{aligned}
c:[0,1]&\to X\\
t&\mapsto p(e,1)
\end{aligned}
$$

và với mọi $t\in[0,1]$, ta đặt $c_1(t)=1$. Khi đó, $c=f_e\circ c_1$, kéo theo $l(c)=|c_1(0)-c_1(1)|=0$. Như vậy, $\min A=0$.

(1.3) Nếu $x=y=p(e,s)$ với $e\in E$, $s\in(0,1)$, thì ta đặt

$$
\begin{aligned}
c:[0,1]&\to X\\
t&\mapsto p(e,s)
\end{aligned}
$$

và với mọi $t\in[0,1]$, ta đặt $c_1(t)=s$. Khi đó, $c=f_e\circ c_1$, kéo theo $l(c)=|c_1(0)-c_1(1)|=0$. Như vậy, $\min A=0$.

Trường hợp 2. $x\neq y$.

(2.1) Nếu x,y cùng là các đỉnh của X, thì trước tiên ta chỉ ra rằng tồn tại $u\in A$ sao cho tồn tại $v_u\in A\cap\mathbb{N}$ mà $v_u\leq u$. Thật vậy, với mọi $u\in A$, $u=l(c)$ với $c:[a,b]\to X$ là một đường tuyến tính từng khúc nối x,y. Xét tập tất cả các đường đi tuyến tính từng khúc d nối x,y mà $l(d)\leq u$. Khi đó, ta chọn một đường đi trong tập này mà có số các đoạn chia tương ứng là bé nhất, và ta gọi số bé nhất này là n. Ta thấy rằng tập này khác rỗng do chứa c. Bởi vì mỗi tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$ đều có phần tử bé nhất nên đường đi như thế là tồn tại. Ta gọi đường đi này là $d:[a',b']\to X$.

Giả sử $\pi=\{s_0,\ldots,s_n\}$ là một phân hoạch tương ứng của $[a',b']$ sao cho với mọi $k\in\{0,\ldots,n-1\}$, tồn tại $e_k\in E$ và $d_k:[s_k,s_{k+1}]\to[0,1]$ là các ánh xạ affine thỏa mãn $d|_{[s_k,s_{k+1}]}=f_{e_k}\circ d_k$ và

$$\sum_{k=0}^{n-1} | d_k(s_k) - d_k(s_{k+1}) | = l(d).$$

Nếu $n=1,$ thì do $d(s_0),\ d(s_1)$ là các đỉnh của X nên

$$d(s_0) = f_{e_0}\left(d_0(s_0)\right) = p\left(e_0, d_0(s_0)\right).$$

Suy ra $d_0(s_0) \in \{0,1\}$ và

$$d(s_1) = f_{e_0}\left(d_0(s_1)\right) = p\left(e_0, d_0(s_1)\right),$$

kéo theo $d_0(s_1) \in \{0,1\}$. Do đó,

$$| d(s_0) - d(s_1) | \in \mathbb{N},$$

suy ra $l(d) \in \mathbb{N}$. Như vậy, nếu ta đặt $v_u = l(d),$ thì $v_u \in A \cap \mathbb{N}$ và $v_u \le u.$

Bây giờ, giả sử $n \ge 2.$ Khi đó,nếu tồn tại $k \in \{0,...,n-1\}$ sao cho d_k là hằng trên $[s_k, s_{k+1}],$ thì bằng cách bỏ đi đoạn $[s_k, s_{k+1}]$ ta có thể lập được một đường đi tuyến tính từng khúc nối x, y có độ dài nhỏ hơn hay bằng $l(d) \le u.$ Mặt khác, vì số đoạn chia nhỏ hơn n nên ta suy ra vô lý. Do đó, với mỗi $k \in \{0,...,n-1\},$ d_k không là hằng trên $[s_k, s_{k+1}].$ Như vậy, với mọi $k \in \{0,...,n-1\},$ và với mọi $s \in (s_k, s_{k+1}),$ tồn tại $\alpha \in (0,1)$ sao cho

$$s = (1-\alpha)s_k + st_{k+1}.$$

Suy ra

$$d_k(s) = (1-\alpha)d_k(s_k) + \alpha d_k(s_{k+1}) \in (0,1),$$

kéo theo $d(s) = p\left(e_k, d_k(s)\right).$ Do vậy, $d(s)$ không là đỉnh của đồ thị X. Bây giờ, ta đặt

$$\{k \in \{0,...,n\} : d(s_k) \text{ là đỉnh của } X\} = m_0,...,m_p,$$

trong đó $0 = m_0 < ... < m_p = n.$ Khi đó, ta suy ra $d(s_{m_0}),...,d(s_{m_p})$ là phân biệt. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng có hai đỉnh trùng nhau. Bằng cách bỏ đi một số đoạn ta tìm được một đường đi tuyến tính từng khúc nối x, y có độ dài nhỏ hơn hay bằng u và số các đoạn chia nhỏ hơn $n.$ Điều này dẫn đến vô lý.

Bởi vì $d(s_{m_0+1}),...,d(s_{m_1-1})$ không là đỉnh của X nên ta có

$$\begin{aligned}
&d_0(s_{m_0+1}) = d_1(s_{m_0+1}),\\
&d_1(s_{m_0+2}) = d_2(s_{m_0+2}),\\
&...,\\
&d_{m_1-2}(s_{m_1-1}) = d_{m_1-1}(s_{m_1-1})
\end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra

$$\begin{aligned}
&| d_0(s_{m_0}) - d_0(s_{m_0+1}) | + | d_1(s_{m_0+1}) - d_1(s_{m_0+2}) | \\
&\qquad + | d_2(s_{m_0+2}) - d_2(s_{m_0+3}) | + ... \\
&\qquad + | d_{m_1-1}(s_{m_1-1}) - d_{m_1-1}(s_{m_1}) | \\
&\ge | d_0(s_{m_0}) - d_{m_1-1}(s_{m_1}) |.
\end{aligned}$$

Hơn nữa, vì $d(s_{m_0+1}),...,d(s_{m_1-1})$ không là đỉnh của X nên $e_0 = ... = e_{m_1-1}.$ Suy ra

$$p\left(e_0, d_0(s_{m_0})\right) = d(s_{m_0}) \ne d(s_{m_1}) = p\left(e_0, d_{m_1-1}(s_{m_1})\right),$$

kéo theo $d_0(s_{m_0}) \ne d_{m_1-1}(s_{m_1}).$ Mặt khác, vì

$$d_0(s_{m_0}), d_{m_1-1}(s_{m_1}) \in \{0,1\}$$

nên $| d_0(s_{m_0}) - d_{m_1-1}(s_{m_1}) | \ge 1.$

Bởi vì $d(s_{m_0}), d(s_{m_1})$ là hai đỉnh khác nhau của cùng một cạnh e_0 nên sử dụng hàm f_{e_0} ta tìm được một đường đi tuyến tính từng khúc nối $d(s_{m_0}), d(s_{m_1})$ có độ dài bằng 1. Ta thay $d|_{[s_{m_0}, s_{m_1}]}$ bằng đường đi mới này. Tiếp tục làm như thế đối với các đoạn $[s_{m_1}, s_{m_2}],\ ...,[s_{m_{p-1}}, s_{m_p}]$ ta tìm được một đường đi tuyến tính từng khúc γ nối x, y mà $l(\gamma) \le u$ và có độ dài là một số tự nhiên.

Tiếp theo, vì $\{v_u : u \in A\}$ là một tập con khác rỗng của tập $\mathbb{N}$ nên nó có phần tử bé nhất, và phần tử này cũng là phần tử bé nhất của $A.$ Như vậy, ta đã chứng minh được cho trường hợp x, y là các đỉnh của X. Hơn nữa, nếu $d(x,y) = n \in \mathbb{N}^*,$ thì tồn tại các đỉnh

$$x = d_0,\ d_1,...,\ d_k,\ d_{k+1},...,\ d_n = y$$

và tồn tại $e_0, ...\ e_k,\ e_{k+1},\ ...,\ e_{n-1} \in E$ và $d_k,\ d_{k+1}$ là hai đầu mút khác nhau của e_k với mọi $k \in \{0,...,n-1\}.$

(2.2) Nếu x không là một đỉnh nào của X và y là một đỉnh của X, thì tồn tại $e \in E$, $t'_0 \in (0,1)$ sao cho $x = p(e,t'_0)$. Bây giờ, giả sử

$$\begin{aligned} d : [0,t_0'] &\to X \\ t &\mapsto d(t) = p(e,t). \end{aligned}$$

Khi đó, d là một đường đi tuyến tính từng khúc nối $x, p(e,0)$ có độ dài t'_0. Ta đặt

$$u = d\big(p(e,0), y\big).$$

Khi đó, $u \in \mathbb{N}$. Hoàn toàn tương tự ta suy ra

$$\begin{aligned} d' : [t_0',1] &\to X \\ t &\mapsto d'(t) = p(e,t). \end{aligned}$$

là một đường đi tuyến tính từng khúc nối $x, p(e,1)$ có độ dài $1 - t'_0$. Bây giờ, ta đặt

$$v = d\big(p(e,1), y\big).$$

Suy ra $v \in \mathbb{N}$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$d(x,y) = \min\{u + t'_0, v + 1 - t'_0\}.$$

Thật vậy, đặt $\alpha = \min\{u + t'_0, v + 1 - t'_0\}$. Khi đó, hiển nhiên rằng tồn tại một đường đi tuyến tính nối x, y mà có độ dài bằng α. Giả sử $c : [a,b] \to X$ là một đường đi tuyến tính từng khúc nối x, y. Ta chứng tỏ rằng $l(c) \geq \alpha$.

Giả sử $\pi = \{t_0, ..., t_k, t_{k+1}, ..., t_n\}$ là một phân hoạch của $[a,b]$ sao cho với mọi $k \in \{0, ..., n-1\}$, tồn tại $e_k \in E$ và tồn tại $c_k : [t_k, t_{k+1}] \to [0,1]$ là ánh xạ affine thỏa mãn $c|_{[t_k,t_{k+1}]} = f_{e_k} \circ c_k$. Ta có

$$c(a) = x = p(e,t_0),\ t_0 \in (0,1),$$

$$c(a) = p\big(e_0, c_0(a)\big).$$

Suy ra $e_0 = e$, $c_0(a) = t_0$. Xét

$c_0(t_0)$, $c_0(t_1)$, $c_1(t_1)$, $c_1(t_2)$, $c_2(t_2)$, ..., $c_{n-1}(t_{n-1})$, $c_{n-1}(t_n)$.

Ta thấy rằng với mọi $k \in \{0, ..., n-1\}$, $c_k(t_{k+1})$, $c_{k+1}(t_{k+1})$ đồng thời cùng thuộc hoặc đồng thời không cùng thuộc tập $(0,1)$. Hơn nữa, ta thấy $c(t_0)$ không là đỉnh của X, $c(t_n)$ là đỉnh của X. Do đó, ta tìm được $k_0 \in \{0, ..., n-1\}$ sao cho $c(t_0), ..., c(t_{k_0})$ không là đỉnh của X, $c(t_{k_0+1})$ là một đỉnh của X. Ta có,

$$e = e_0 = ... = e_{k_0},\ c_0(t_1) = c_1(t_1),$$

$$c_1(t_2) = c_2(t_2),\ ...,\ c_{k_0-1}(t_{k_0}) = c_{k_0}(t_{k_0}).$$

Khi đó,

+) Nếu $c_{k_0}(t_{k_0+1}) = 0$, thì

$$c(t_{k_0+1}) = p(e_{k_0}, c_{k_0}(t_{k_0+1})) = p(e,0)$$

và ta có

$$\begin{aligned} l(c) &= |c_0(t_0) - c_0(t_1)| + |c_1(t_1) - c_1(t_2)| \\ &\qquad + ... + |c_{k_0}(t_{k_0}) - c_{k_0}(t_{k_0+1})| + u \\ &= |c_0(t_0) - c_1(t_1)| + |c_1(t_1) - c_2(t_2)| \\ &\qquad + ... + |c_{k_0}(t_{k_0}) - c_{k_0}(t_{k_0+1})| + u \\ &\geq |t'_0| + u \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

+) Nếu $c_{k_0}(t_{k_0+1}) = 1$, thì

$$c(t_{k_0+1}) = p\Big(e_{k_0}, c_{k_0}(t_{k_0+1})\Big) = p(e,1)$$

và ta có

$$\begin{aligned} l(c) &= |c_0(t_0) - c_0(t_1)| + |c_1(t_1) - c_1(t_2)| \\ &\qquad + ... + |c_{k_0}(t_{k_0}) - c_{k_0}(t_{k_0+1})| + v \\ &= |c_0(t_0) - c_1(t_1)| + |c_1(t_1) - c_2(t_2)| \\ &\qquad + ... + |c_{k_0}(t_{k_0}) - c_{k_0}(t_{k_0+1})| + u \\ &\geq |t'_0 - 1| + v \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

(2.3) Nếu x không là một đỉnh nào của X và y không là một đỉnh nào của X, thì tồn tại $e \in E$, $t'_0 \in (0,1)$ sao cho $x = p(e,t'_0)$, và tồn tại $e' \in E$, $t''_0 \in (0,1)$ sao cho $y = p(e',t''_0)$.

Nếu $e \neq e'$, thì xét

$$\begin{aligned} d : [0,t'_0] &\to X \\ t &\mapsto d(t) = p(e,t). \end{aligned}$$

Khi đó, d là một đường đi tuyến tính từng khúc nối x, $p(e,0)$ có độ dài là t'_0. Ta đặt

$$u = d\big(p(e,0), y\big).$$

Hoàn toàn tương tự ta suy ra

$$d':[t'_0,1]\to X$$
$$t \mapsto d'(t)=p(e,t).$$

là một đường đi tuyến tính từng khúc nối x, $p(e,1)$ có độ dài là $1-t'_0$. Ta đặt $v=d\left(p(e,1),y\right)$. Như vậy, $v\in ¥$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng

$$d(x,y)=\min\left\{u+t'_0, v+1-t'_0\right\}.$$

Thật vậy, ta đặt

$$\alpha=\min\left\{u+t'_0, v+1-t'_0\right\}.$$

Khi đó, theo chứng minh trên ta suy ra rằng tồn tại một đường đi tuyến tính nối x,y mà có độ dài bằng α. Giả sử $c:[a,b]\to X$ là một đường đi tuyến tính từng khúc nối x,y ta phải chứng minh $l(c)\geq\alpha$.

Thật vậy, giả sử $\pi=\left\{t_0,...,t_k,t_{k+1},...,t_n\right\}$ là một phân hoạch của $[a,b]$ sao cho với mọi $k\in\left\{0,...,n-1\right\}$, tồn tại $e_k\in E$ và tồn tại $c_k:[t_k,t_{k+1}]\to[0,1]$ là ánh xạ affine sao cho $c|_{[t_k,t_{k+1}]}=f_{e_k}\circ c_k$. Ta xét hai trường hợp sau.

1. Trường hợp $c(t_0),...,c(t_n)$ không là đỉnh của X. Khi đó, $e=e_0=e_1=...=e_{n-1}=e'$. Điều này là vô lý.

2. Trường hợp ngược lại ta tìm được $k_0\in\left\{0,...,n-2\right\}$ sao cho $c(t_0),...,c(t_{k_0})$ không là đỉnh của X, $c(t_{k_0+1})$ là một đỉnh của X. Ta có

$$e=e_0=...=e_{k_0},$$

$$c_0(t_1)=c_1(t_1),c_1(t_2)=c_2(t_2),...,c_{k_0-1}(t_{k_0})=c_{k_0}(t_{k_0}).$$

Hơn nữa,

- Nếu $c_{k_0}(t_{k_0+1})=0$, thì

$$c(t_{k_0+1})=p\left(e_{k_0},c_{k_0}(t_{k_0+1})\right)=p(e,0),$$

và ta có

$$\begin{aligned}l(c)&=|c_0(t_0)-c_0(t_1)|+|c_1(t_1)-c_1(t_2)|\\&\quad+...+|c_{k_0}(t_{k_0})-c_{k_0}(t_{k_0+1})|+u\\&=|c_0(t_0)-c_1(t_1)|+|c_1(t_1)-c_2(t_2)|\\&\quad+...+|c_{k_0}(t_{k_0})-c_{k_0}(t_{k_0+1})|+u\\&\geq|t'_0|+u\\&\geq\alpha.\end{aligned}$$

- Nếu $c_{k_0}(t_{k_0+1})=1$, thì

$$c(t_{k_0+1})=p\left(e_{k_0},c_{k_0}(t_{k_0+1})\right)=p(e,1)$$

và ta có

$$\begin{aligned}l(c)&=|c_0(t_0)-c_0(t_1)|+|c_1(t_1)-c_1(t_2)|\\&\quad+...+|c_{k_0}(t_{k_0})-c_{k_0}(t_{k_0+1})|+v\\&=|c_0(t_0)-c_1(t_1)|+|c_1(t_1)-c_2(t_2)|\\&\quad+...+|c_{k_0}(t_{k_0})-c_{k_0}(t_{k_0+1})|+u\\&\geq|t'_0-1|+v\\&\geq\alpha.\end{aligned}$$

Ta thấy rằng, nếu $e=e'$, thì rõ ràng ta tìm được một đường đi tuyến tính từng khúc nối x,y có độ dài là $|t'_0-t''_0|$ (*).

Bây giờ, giả sử

$$d:[0,t'_0]\to X$$
$$t\mapsto d(t)=p(e,t).$$

Khi đó, d là một đường đi tuyến tính từng khúc nối $x,p(e,0)$ có độ dài là t'_0. Ta đặt

$$u=d\left(p(e,0),y\right).$$

Hoàn toàn tương tự ta suy ra rằng

$$d:[0,t'_0]\to X$$
$$t\mapsto d(t)=p(e,t).$$

là một đường đi tuyến tính từng khúc nối x với $p(e,1)$ và có độ dài là $1-t'_0$, ta đặt $v=d\left(p(e,1),y\right)$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$d(x,y)=\min\left\{u+t'_0, v+1-t'_0, |t'_0-t''_0|\right\}.$$

Thật vậy, ta đặt

$$\alpha=\min\left\{u+t'_0, v+1-t'_0, |t'_0-t''_0|\right\}.$$

Khi đó, sử dụng (*) ta suy ra rằng tồn tại một đường đi tuyến tính nối x, y mà có độ dài bằng α. Bây giờ, giả sử $c:[a,b]\to X$ là một đường đi tuyến tính từng khúc nối x, y. Ta phải chứng minh $l(c)\ge\alpha$.

Giả sử $\pi=\{t_0,...,t_k,t_{k+1},...,t_n\}$ là một phân hoạch của $[a,b]$ thỏa mãn rằng với mọi $k\in\{0,...,n-1\}$, tồn tại $e_k\in E$, $c_k:[t_k,t_{k+1}]\to[0,1]$ là ánh xạ affine sao cho $c|_{[t_k,t_{k+1}]}=f_{e_k}\text{o}c_k$. Khi đó,

Nếu $c(t_0),...,c(t_n)$ không là đỉnh của X. Khi đó, $e=e_0=e_1=...=e_{n-1}$. Suy ra

$$\begin{aligned}l(c)&=|c_0(t_0)-c_0(t_1)|+|c_1(t_0)-c_1(t_1)|+...\\&\quad+|c_{n-1}(t_{n-1})-c_{n-1}(t_n)|\\&\ge|c_0(t_0)-c_1(t_1)|+|c_1(t_0)-c_2(t_1)|+...\\&\quad+|c_{n-1}(t_{n-1})-c_{n-1}(t_n)|\\&\ge|t'_0-t''_0|\ge\alpha.\end{aligned}$$

Nếu ngược lại ta tìm được $k_0\in\{0,...,n-2\}$ sao cho $c(t_0),...,c(t_{k_0})$ không là đỉnh của X, $c(t_{k_0+1})$ là một đỉnh của X. Ta có

$$e=e_0=...=e_{k_0},$$
$$c_0(t_1)=c_1(t_1),c_1(t_2)=c_2(t_2),...,c_{k_0-1}(t_{k_0})=c_{k_0}(t_{k_0});$$

Bây giờ, ta xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp $c_{k_0}(t_{k_0+1})=0$:

Khi đó, $c(t_{k_0+1})=p(e_{k_0},c_{k_0}(t_{k_0+1}))=p(e,0)$, và

$$\begin{aligned}l(c)&=|c_0(t_0)-c_0(t_1)|+|c_1(t_1)-c_1(t_2)|+...\\&\quad+|c_{k_0}(t_{k_0})-c_{k_0}(t_{k_0+1})|+u\\&=|c_0(t_0)-c_1(t_1)|+|c_1(t_1)-c_2(t_2)|+...\\&\quad+|c_{k_0}(t_{k_0})-c_{k_0}(t_{k_0+1})|+u\\&\ge|t'_0|+u\ge\alpha.\end{aligned}$$

+ Trường hợp $c_{k_0}(t_{k_0+1})=1$:

Khi đó, $c(t_{k_0+1})=p(e_{k_0},c_{k_0}(t_{k_0+1}))=p(e,1)$, và

$$\begin{aligned}l(c)&=|c_0(t_0)-c_0(t_1)|+|c_1(t_1)-c_1(t_2)|+...\\&\quad+|c_{k_0}(t_{k_0})-c_{k_0}(t_{k_0+1})|+v\\&=|c_0(t_0)-c_1(t_1)|+|c_1(t_1)-c_2(t_2)|+...\\&\quad+|c_{k_0}(t_{k_0})-c_{k_0}(t_{k_0+1})|+u\\&\ge|t'_0-1|+v\ge\alpha.\end{aligned}$$

Như vậy, ta đã chứng minh được rằng A có phần tử bé nhất. Do đó, tồn tại một đường đi tuyến tính từng khúc c nối x, y sao cho $l(c)=d(x,y)$.

3.1.3. Định lí. *d được xây dựng trong chứng minh của Định lí 3.1.2 là một metric trên X.*

Chứng minh. Giả sử $x,y,z\in X$. Khi đó,

(1) Bởi vì

$$d(x,y)=\inf\{l(c):c\text{ là đường đi tuyến tính từng khúc nối }x,y\}.$$

nên $d(x,y)\ge 0$. Hơn nữa, ta có

(1.1) Nếu $x=y$, thì hiển nhiên rằng $d(x,y)=0$.

(1.2) Nếu $x\ne y$, thì ta chọn c là đường đi tuyến tính từng khúc nối x, y sao cho $l(c)=d(x,y)$. Giả sử $\pi=\{t_0,...,t_k,t_{k+1},...,t_n\}$ là một phân hoạch của $[a,b]$ sao cho với mọi $k\in\{0,...,n-1\}$, tồn tại $e_k\in E$ và $c_k:[t_k,t_{k+1}]\to[0,1]$ là ánh xạ affine thỏa mãn $c|_{[t_k,t_{k+1}]}=f_{e_k}\text{o}c_k$. Bây giờ, nếu $d(x,y)=0$, thì

$$\begin{aligned}0=l(c)&=|c_0(t_0)-c_0(t_1)|+|c_1(t_1)-c_1(t_2)|+...\\&\quad+|c_{n-1}(t_{n-1})-c_{n-1}(t_n)|.\end{aligned}$$

Suy ra

$$c_0(t_0)=c_0(t_1),\ c_1(t_1)=c_1(t_2),...,\ c_{n-1}(t_{n-1})=c_{n-1}(t_n),$$

kéo theo

$$x=c(t_0)=c(t_1)=c(t_2)=...=c(t_{n-1})=c(t_n)=y.$$

Điều này mâu thuẫn với $x\ne y$. Như vậy, $d(x,y)>0$. Do đó, nếu $d(x,y)=0$, thì $x=y$.

(2) Ta có

$$d(x,y)=\inf\{l(c):c\text{ là đường đi tuyến tính từng khúc nối }x,y\}.$$

Đặt

$$A=\{l(c):c\text{ là đường đi tuyến tính từng khúc nối }x,y\}.$$
$$B=\{l(c):c\text{ là đường đi tuyến tính từng khúc nối }y,x\}.$$

Khi đó, $d(x,y)=\inf A,\ d(y,x)=\inf B.$

Giả sử $c:[a,b]\to X$ là một đường đi tuyến tính từng khúc nối $x,y.$ Khi đó, $\overline{c}(t)=c(a+b-t)$ là đường đi tuyến tính từng khúc nối y,x và $l(\overline{c})=l(c).$ Bởi thế, $A=B,$ kéo theo $\inf A=\inf B.$ Như vậy, $d(x,y)=d(y,x).$

(3) Giả sử $c:[a,b]\to X$ là đường đi tuyến tính từng khúc nối x,y sao cho $l(c)=d(x,y)$ và $c':[b,b']\to X$ là đường đi tuyến tính từng khúc nối y,z sao cho $l(c')=d(y,z).$ Như vậy, đường đi nối c,c' là tuyến tính từng khúc nối x,z có độ dài là $d(x,y)+d(y,z)$. Suy ra

$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z).$$

Từ chứng minh trên ta suy ra rằng d là một metric trên X.

3.1.4. Định lí. (X,d) *là một không gian metric trắc địa.*

Chứng minh. Giả sử $x,y\in X$. Khi đó,

+) Nếu $x=y,$ thì ta chọn $c:[0,0]\to\{x\}$. Bởi thế, ta thu được c là một đường trắc địa nối $x,y.$

+) Nếu $x\ne y,$ thì ta lấy $c:[a,b]\to X$ $(a<b)$ là một đường đi tuyến tính từng khúc nối x,y sao cho $l(c)=d(x,y).$ Giả sử $\pi=\{t_0,...,t_k,t_{k+1},...,t_n\}$ là một phân hoạch của $[a,b]$ sao cho với mọi $k\in\{0,...,n-1\},$ tồn tại $e_k\in E,$ $c_k:[t_k,t_{k+1}]\to[0,1]$ là ánh xạ affine mà $c|_{[t_k,t_{k+1}]}=f_{e_k}\circ c_k$. Lập ánh xạ

$$\phi:c([a,b])\to[0,d(x,y)]$$
$$z \mapsto \phi(z)=d(x,z).$$

Đầu tiên, ta chỉ ra rằng ϕ được xác định đúng đắn. Thật vậy, lấy $d\in[a,b]$ sao cho $c(d)=z.$ Khi đó,

+ Nếu d là một điểm chia của

$$\pi=\{t_0,...,t_k,t_{k+1},...,t_n\},$$

thì ta tìm được một đường đi tuyến tính từng khúc γ nối x,z sao cho

$$l(\gamma)\le l(c)=d(x,y).$$

Suy ra $d(x,z)\le d(x,y),$ kéo theo $\phi(z)\in[0,d(x,y)].$

+ Nếu d không là điểm chia của

$$\pi=\{t_0,...,t_k,t_{k+1},...,t_n\},$$

thì ta thêm vào $\pi=\{t_0,...,t_k,t_{k+1},...,t_n\}$ một điểm chia d ta thu được một đường đi tuyến tính từng khúc γ nối x,z mà $l(\gamma)\le l(c)=d(x,y).$ Suy ra $d(x,z)\le d(x,y),$ kéo theo $\phi(z)\in[0,d(x,y)].$

Như vậy, ϕ được xác định đúng đắn. Hơn nữa,

$$\phi(x)=d(x,x)=0,\ \phi(y)=d(x,y).$$

Tiếp theo, ta chứng minh ϕ bảo toàn khoảng cách.

Giả sử $z_1,z_2\in c([a,b]),$ ta sẽ chỉ ra rằng

$$d(z_1,z_2)=|d(x,z_1)-d(x,z_2)|.$$

Thật vậy, không giảm tổng quát, ta có thể giả sử rằng

$$d(x,z_1)\le d(x,z_2),\ z_1\ne z_2.$$

Bởi vì $z_1,z_2\in c([a,b])$ nên tồn tại $d_1,d_2\in[a,b]$ sao cho $d_1\ne d_2,\ c(d_1)=z_1,\ c(d_2)=z_2.$ Bây giờ, giả sử $d_1>d_2.$ Khi đó, $l(c|_{[a,d_1]})\ge d(x,z_1).$ Hơn nữa, nếu $l(c|_{[a,d_1]})>d(x,z_1),$ thì ta sẽ tìm được một đường đi tuyến tính từng khúc nối x,z_1 mà có độ dài bé hơn $l(c|_{[a,d_1]}).$ Bởi thế, ta tìm được một đường đi tuyến tính từng khúc nối x,y có độ dài bé hơn $l(c).$ Suy ra $l(c|_{[a,d_1]})=d(x,z_1),$ đây là một mâu thuẫn. Như vậy, $l(c|_{[a,d_1]})=d(x,z_1).$ Hoàn toàn tương tự, ta có $l(c|_{[a,d_2]})=d(x,z_2),$ suy ra

$$d(x,z_1)=l(c|_{[a,d_1]})>l(c|_{[a,d_2]})=d(x,z_2).$$

Điều mâu thuẫn này chứng tỏ rằng $d_1<d_2.$

Ta lại có

$$l(c|_{[d_1,d_2]})\ge d(z_1,z_2).$$

Nếu $l(c|_{[d_1,d_2]})>d(z_1,z_2),$ thì ta tìm được một đường đi tuyến tính từng khúc nối z_1,z_2 có độ dài bé hơn $l(c|_{[d_1,d_2]}).$ Như vậy, ta tìm được một đường đi tuyến tính từng khúc nối x, y có độ dài bé hơn $l(c)$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ rằng $l(c|_{[d_1,d_2]}) = d(z_1, z_2)$.

Bởi vì $l(c|_{[a,d_1]}) + l(c|_{[d_1,d_2]}) = l(c|_{[a,d_2]})$ nên

$$d(x, z_1) + d(z_1, z_2) = d(x, z_2),$$

kéo theo

$$d(z_1, z_2) = d(x, z_2) - d(x, z_1)$$
$$d(z_1, z_2) = | d(x, z_2) - d(x, z_1) |.$$

Ta thấy $c : [a,b] \to X$ là đường đi tuyến tính từng khúc, các ánh xạ affine liên tục và với mọi $d_1, d_2 \in [a,b]$ sao cho $d_1 < d_2$, ta có

$$d\left(c(d_1), c(d_2)\right) \le l\left(c|_{[d_1,d_2]}\right).$$

Do vậy, $c : [a,b] \to X$ là ánh xạ liên tục, kéo theo $c([a,b])$ là tập con liên thông của X. Mặt khác, vì ϕ bảo toàn khoảng cách nên nó cũng liên tục. Hơn nữa, vì ϕ nhận giá trị 0 và $d(x, y)$ nên

$$\phi : c([a,b]) \to [0, d(x, y)]$$

là toàn ánh. Cuối cùng, vì ϕ là bảo toàn khoảng cách nên nó cũng là song ánh. Như vậy, $[0, d(x, y)]$ đẳng cự với $c([a,b])$ và $c : [a,b] \to X$ là đường trắc địa nối x, y.

Từ chứng minh trên ta suy ra rằng (X, d) là không gian metric trắc địa.

3.2. Đánh giá

Các kết quả trong bài báo này có ý nghĩa về mặt lý thuyết và góp phần quan trọng trong Lý thuyết nhóm hình học.

4.Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh rằng chiều dài của một đường đi tuyến tính từng khúc bất kỳ trong một không gian metric *X* không phụ thuộc vào các phép phân hoạch π của đoạn [*a*, *b*] và các ánh xạ affine c_k, và với hai điểm *x* và *y* bất kỳ trong *X*, luôn tồn tại một đường đi tuyến tính từng khúc nối *x* với *y*. Qua đó, chúng tôi đã xây dựng được một metric *d* trên *X* mà (*X*, *d*) là không gian metric trắc địa trên *X*.

Tài liệu tham khảo

[1] Martin R. B. (1999), Metric spaces of non-positive curvature, *Springer-Verlag*, *Berlin.*

[2] Batty M. (2003), Notes on hyperbolic and automatic groups, *http://www.academia.edu/182087/Notes_on_Hyperbolic_and_Automatic_Groups.*

[3] Howie J. (2015), Hyperbolic Groups Lecture Notes, *http://www.macs.hw. ac.uk/~jim/samos.pdf.*

GEODESY OF GRAPHS

Abstract: In this article, we firstly prove that the length of every piecewise linear path in a metric space *X* does not depend on the partitions π of section [a,b], and affine mappings c_k defined on section [t_k, t_{k+1}]. Secondly, we prove that with any x and y in a metric space *X*, there exists a piecewise linear path joining *x* to *y*. Thirdly, we prove that the formula

d(x,y) = inf {l(c): c is a piecewise linear path joining x to y}

is a metric on *X*. Finally, we prove that with the metric defined above, (*X*,*d*) is a geodesic metric space.

Key words: graph; metric space; geodesic metric space; geodesic path; piecewise linear path; affine mapping.