UED Journal of Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

CÁC HÀM PHÂN KỲ LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH HYPERBOLIC

Lương Quốc Tuyển[a*], Lê Thị Thu Nguyệt[a]

Nhận bài:
27 – 05 – 2016
Chấp nhận đăng:
09 – 09 – 2016
http://jshe.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Giả sử (X,d) là một không gian metric và $x_1, x_2 \in X$. Khi đó, một phép nhúng đẳng cự $\gamma:[0,d(x_1,x_2)]\to X$ sao cho $\gamma(0)=x_1, \gamma[d(x_1,x_2)]=x_2$ được gọi là một trắc địa giữa x_1, x_2. Không gian metric (X,d) được gọi là một không gian metric trắc địa nếu giữa hai điểm bất kỳ của X tồn tại một trắc địa. Không gian metric (X,d) được gọi là không gian hyperbolic nếu mọi tam giác trắc địa trong X là *thin*. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh rằng trong một không gian metric hyperbolic X tồn tại hàm phân kỳ trắc địa $e:[0,\infty)\to \mathbb{R}$ thỏa mãn $e(0)=\max\{9,\delta\}$, $e(r)=\frac{1}{2^{3+1/\delta}}.2^{r/\delta}$. Hơn nữa, chúng tôi đã chứng minh kết quả rằng trong không gian metric trắc địa (X,d), nếu tồn tại hàm phân kỳ $e(r)$ sao cho $\frac{e(r)}{r}\to\infty$ khi $r\to\infty$, thì (X,d) là một không gian metric hyperbolic, và mỗi tam giác trắc địa Δ trong X đều có *minsize* $(\Delta)\le 2r_0+e_0$.

Từ khóa: Không gian metric; không gian metric trắc địa; không gian metric hyperbolic; hàm phân kỳ; thin.

1. Giới thiệu

Không gian metric trắc địa và không gian metric hyperbolic đã được nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm từ những năm 90 của thế kỷ trước đến nay. Rất nhiều kết quả liên quan đến các không gian này đã được đưa ra bởi các nhà toán học nghiên cứu về Lý thuyết nhóm hình học. Qua đó, các tác giả đã đặt ra nhiều bài toán mở mà đến nay vẫn chưa có lời giải (xem [1, 2, 3]).

Trong bài báo này, trước tiên chúng tôi chứng minh rằng trong không gian metric hyperbolic X tồn tại hàm phân kỳ trắc địa có dạng mũ, và trong không gian metric trắc địa (X,d), nếu tồn tại hàm phân kỳ $e(r)$ sao cho $\frac{e(r)}{r}\to\infty$, khi $r\to\infty$, thì (X,d) là không gian metric hyperbolic.

[a]*Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng*
*** Liên hệ tác giả**
Lương Quốc Tuyển
Email: lqtuyen@ued.udn.vn

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lý thuyết

Giả sử (X,d) là không gian metric, $p:[0,1]\to X$ là một đường trong X, $\pi=[t_0=0,t_1,\dots,t_n=1]$ là một phân hoạch của $[0,1]$ và

$$l_\pi=\sum_{i=1}^{n} d\left[p(t_{i-1}),p(t_i)\right].$$

Khi đó, nếu tồn tại $l(p)=\sup_\pi l_\pi$, thì ta nói p là đường *cầu trường được* và $l(p)$ được gọi là *độ dài* của p.

Đặt

$$\Gamma=\{p: p \text{ là đường cầu trường được}\}.$$

Không gian (X,d) được gọi là *không gian metric đường* hay *không gian metric độ dài* nếu với mọi $x_1, x_2\in X$, ta có

$$d(x_1,x_2)=\inf\left\{l(p): p\in\Gamma,\ p \text{ nối } x_1,x_2\right\}.$$

Giả sử (X,d) là không gian metric, $x_1, x_2 \in X$. Khi đó, một phép nhúng đẳng cự $\gamma : [0, d(x_1,x_2)] \to X$ thỏa mãn $\gamma(0) = x_1, \gamma\left[d(x_1,x_2)\right] = x_2$ được gọi là *một trắc địa* giữa x_1, x_2.

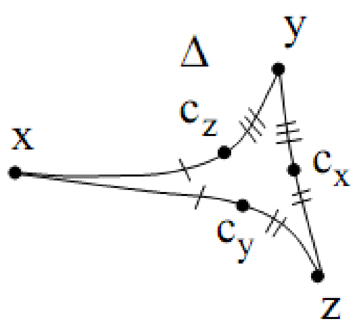
Không gian metric X được gọi là *không gian metric trắc địa* nếu với hai điểm bất kỳ của X, tồn tại một trắc địa giữa chúng.

Giả sử (X,d) là một không gian metric trắc địa, $\Delta = [x,y,z]$ là một tam giác trắc địa trong X, và $c_x \in [y,z]$, $c_y \in [z,x]$, $c_z \in [x,y]$ thỏa mãn

$$d(x,c_y) = d(x,c_z),$$

$$d(y,c_z) = d(y,c_x),$$

$$d(z,c_x) = d(z,c_y).$$



Khi đó, c_x, c_y, c_z được gọi là các điểm *internal* của Δ. Hơn nữa, Δ được gọi là δ*-slim* nếu

$$\min\{d(w,[y,z]), d(w,[z,x])\} \le \delta$$

với mọi $w \in [x,y]$, và Δ được gọi là δ*-thin* nếu

$$\max\{d(c_x,c_y), d(c_y,c_z), d(c_z,c_x)\} \le \delta,$$

trong đó, c_x, c_y, c_z lần lượt là điểm internal của $[y,z]$, $[z,x]$, $[x,y]$.

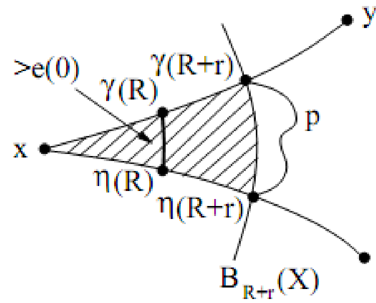
- Không gian metric trắc địa (X,d) được gọi là *không gian hyperbolic* nếu mọi tam giác trắc địa trong X là δ-thin.

Giả sử (X,d) là không gian metric trắc địa. Ta nói $e : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ là *hàm phân kỳ* trên X nếu với mọi $x \in X$ và với mọi trắc địa γ, η xuất phát từ x đến y, z trong X sao cho với mọi $r, R > 0$, ta có

$$R + r \le \min\left\{d(x,y), d(x,z)\right\},$$

$$d\left(\gamma(R), \eta(R)\right) > e_0.$$

Khi đó, với mọi đường đi p trong $X \setminus B_{R+r}(x)$ nối $\gamma(R+r)$ với $\eta(R+r)$, ta có $l(p) \ge e(r)$.



Nếu tồn tại một hàm phân kỳ trên X, thì ta nói rằng *phân kỳ trắc địa* trên X.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết trong quá trình thực hiện bài báo. Nghiên cứu tài liệu của các tác giả đi trước để đưa ra những kết quả mới.

3.Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

3.1.1. Định lí. *Trong một không gian metric hyperbolic* X, *tồn tại hàm phân kỳ trắc địa* $e : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *có dạng mũ, nghĩa là*

$$e(r) = \alpha a^r, \text{ trong đó } r, \alpha > 0;\ a \ge 1.$$

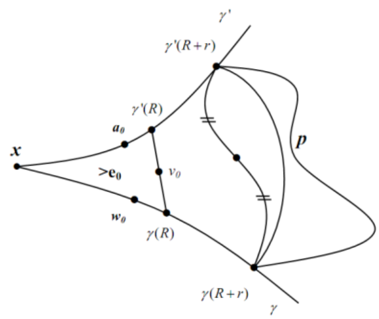
Chứng minh. Giả sử $\delta \ge 0$. Khi đó, vì X là không gian hyperbolic nên mọi tam giác trắc địa trong X là δ-thin. Ta đặt

$$e(0) = \max\{9, \delta\}, e(r) = \frac{1}{2^{3+1/\delta}}.2^{r/\delta}.$$

Lấy γ, γ' là hai trắc địa có độ dài $R + r$ xuất phát từ x sao cho

$$d\left(\gamma(R), \gamma'(R)\right) > e(0),$$

và p là đường đi từ $\gamma(R+r)$ đến $\gamma'(R+r)$ mà p không nằm trong $B_{R+r}(x)$. Ta phải chứng minh $l(p) \ge e(r)$.



Đầu tiên, ta sẽ chứng minh $l(p) \ge 2.$ Thật vậy,

Trường hợp 1. Nếu $r < 1,$ thì

$$\begin{aligned} l(p) &\ge d\big(\gamma(R+r), \gamma'(R+r)\big) \\ &\ge d\big(\gamma(R), \gamma'(R)\big) - 2r \\ &\ge 9 - 2r > 7 > 2. \end{aligned}$$

Trường hợp 2. Nếu $r \ge 1,$ thì ta lập đường trắc địa α nối $\gamma(R+r), \gamma'(R+r).$ Giả sử v_0 là điểm giữa của $\alpha.$ Ta xét các điểm internal của tam giác trắc địa

$$\big[x, \gamma(R+r), \gamma'(R+r)\big].$$

Bởi vì

$$d\big(\gamma(R+r), \gamma'(R+r)\big) > e_0 > \delta$$

nên điểm internal của tam giác trên cạnh $\big[x, \gamma(R+r)\big]$ thuộc đoạn $\big[x, \gamma(R+r)\big].$ Do vậy,

$$d\big(\gamma(R+r), w_0\big) \ge 1.$$

Tương tự, ta có

$$d\big(\gamma'(R+r), u_0\big) \ge 1.$$

Do đó, ta thu được

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= d\big(\gamma(R+r), v_0\big) + d\big(v_0, \gamma'\big(R+r\big)\big) \\ &= d\big(\gamma(R+r), w_0\big) + d\big(\gamma'(R+r), u_0\big) \\ &\ge 2. \end{aligned}$$

Như vậy, $l(p) \ge l(\alpha) \ge 2.$

Bây giờ, ta chứng minh $l(p) \ge e(r).$ Thật vậy, vì $l(p) \ge 2$ nên $\log_2\big[l(p)\big] \ge 1.$ Ta chọn $n \in ¥^*$ sao cho

$$\log_2\big[l(p)\big] \le n \le \log_2\big[l(p)\big] + 1.$$

Điều này suy ra rằng

$$l(p) \le 2^n \le 2l(p).$$

Chọn điểm p_0 nằm giữa đường cong $p.$ Bởi vì tam giác trắc địa

$$\big[\gamma(R+r), \gamma'(R+r), p_0\big]$$

là δ -thin nên nó là δ -slim. Do đó, ta tìm được

$$v_1 \in \big[p_0, \gamma'(R+r)\big]$$

hoặc

$$v_1 \in \big[p_0, \gamma(R+r)\big]$$

sao cho $d(v_0, v_1) \le \delta.$

Tương tự như vậy, ta sẽ tìm được các điểm $v_2, ..., v_n.$ Hơn nữa, ta có $d\big(\gamma(R), v_0\big) < \delta$ hoặc $d\big(\gamma'(R), v_0\big) < \delta.$ Điều này suy ra rằng

$$\begin{aligned} R + r &\le d\big(x, P\big) \le d\big(\gamma(R), P\big) + R \\ &\le \underbrace{\delta + \dots + \delta}_{n+1} + \frac{l(p)}{2^n} + R \\ &\le \delta\big(\log_2\big[l(p)\big] + 2\big) + R + 1, \end{aligned}$$

kéo theo

$$r \le \delta\big(\log_2\big[l(p)\big] + 2\big) + 1.$$

Do đó, ta có

$$l(p) > \frac{1}{2^{3+1/\delta}} 2^{\frac{r}{\delta}} = e(r).$$

Như vậy, ta đã tìm được hàm phân kỳ trắc địa thỏa mãn yêu cầu của định lí.

3.1.2. Định lí. *Giả sử (X, d) là một không gian metric trắc địa. Khi đó, nếu tồn tại hàm phân kỳ $e(r)$ sao cho $\frac{e(r)}{r} \to \infty$ khi $r \to \infty,$ thì (X, d) là một không gian metric hyperbolic.*

Chứng minh. Chọn $e_0 > e(0),$ $e_0 > 0.$ Khi đó, vì $\frac{e(r)}{r} \to 0$ nên $\frac{e(r)}{r} - \frac{6e_0}{r} \to \infty$ khi $r \to \infty.$ Bởi thế, tồn tại $r_0 > 0$ sao cho với mọi $r > r_0,$ ta có

$$\frac{e(r)}{r} - \frac{6e_0}{r} \ge 4.$$

Đặt $\delta = 2r_0 + 2e_0$. Để hoàn thành chứng minh, ta chỉ cần chứng tỏ rằng mỗi tam giác trắc địa Δ đều có $minsize(\Delta) \le \delta$.

Thật vậy, giả sử $\Delta = [x, y, z]$ là tam giác trắc địa bất kỳ của X. Khi đó,

- Nếu với mọi $u \in [x, y]$, $v \in [x, z]$ sao cho $d(x,u) = d(x,v)$ ta đều có $d(u,v) \le e_0$, thì

$$minsize(\Delta) \le e_0 \le d.$$

- Nếu ngược lại thì, tồn tại $u_0 \in [x, y]$, $v_0 \in [x, z]$ sao cho

$$d(x,u) = d(x,v),\ d(u,v) > e_0.$$

Do đó, tồn tại $x_1 \in [x, y]$, $x_2 \in [x, z]$ sao cho

$$d(x,u) = d(x,v),\ d(x_1, x_2) = e_0,$$

và với mọi $x_1' \in [x, x_1]$, $x_2' \in [x, x_2]$ thỏa mãn

$$d(x, x_1') = d(x, x_2'),$$

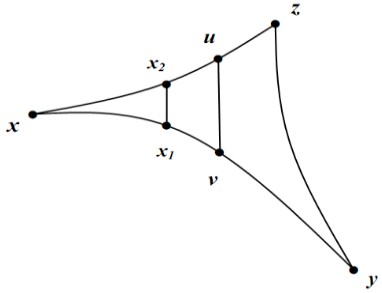
ta đều có $d(x_1', x_2') \le e_0$.

Lấy $\alpha_0 = \min\{d(x,z), d(y,z)\}$. Khi đó, với mọi $\alpha \in [0, \alpha_0]$, chọn $u_\alpha, v_\alpha \in [x, y]$ sao cho

$$d(x, u_\alpha) = \alpha, \quad d(x, v_\alpha) = \alpha.$$

Xét hàm

$$\alpha \mapsto \varphi(\alpha) = d(u_\alpha, v_\alpha).$$



Ta có

$$\begin{aligned} |\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha')| &= d(u_\alpha, u_{\alpha'}) + d(v_\alpha, v_{\alpha'}) \\ &= |\alpha - \alpha'| + |\alpha - \alpha'| \\ &= 2|\alpha - \alpha'|. \end{aligned}$$

Suy ra φ liên tục. Hơn nữa, vì

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(d(x, u_0) > e_0$$

nên tồn tại $\alpha \in [0, \alpha_0]$ sao cho $\varphi(\alpha) = e_0$. Do đó, $\varphi^{-1}(\{e_0\}) \ne \varnothing$ và đóng trong $[0, \alpha_0]$, kéo theo $\varphi^{-1}(\{e_0\})$ là tập con compact. Bởi thế, tồn tại $\alpha_1 = \min \varphi^{-1}(\{e_0\})$. Chọn

$$x_1 = u_{\alpha_1}, x_2 = v_{\alpha_1}.$$

Ta chứng tỏ rằng $\varphi(\alpha) \le e_0$. Thật vậy, giả sử $\varphi(\alpha) > e_0$. Khi đó, tồn tại $\beta \in (0, \alpha)$ sao cho $\varphi(\beta) = e_0$. Suy ra

$$\alpha_1 \le \beta < \alpha \le \alpha_1,$$

đây là một mâu thuẫn. Như vậy,

$$\varphi(\alpha) \le e_0 \text{ với mọi } \alpha \in [0, \alpha_1].$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng thu được kết quả như trên đối với các đỉnh y, z.

Lấy $y_1 \in [y, z], y_2 \in [y, x]$ sao cho

$$d(y, y_1) = d(y, y_2),\ d(y_1, y_2) = e_0.$$

Khi đó, với mọi $u \in [y, y_1], v \in [y, y_2]$, ta có

$$d(y,u) = d(y,v),\ d(u,v) \le e_0.$$

Do đó, tồn tại $z_1 \in [z, x]$, $z_2 \in [z, y]$ sao cho

$$d(z, z_1) = d(z, z_2),\ d(z_1, z_2) = e_0$$

và với mọi $u \in [z, z_1]$, $v \in [z, z_2]$, $d(z,u) = d(z,v)$, ta có $d(u,v) \le e_0$. Ta thấy rằng, nếu $x_1 \in [y_2, y]$, thì

$$minsize(\Delta) \le 2e_0 \le \delta.$$

Do đó, ta chỉ cần xét

$$y_2 \in (x_1, y),\ z_2 \in (z, y_1),\ x_2 \in (x, z_1).$$

Bây giờ, ta đặt

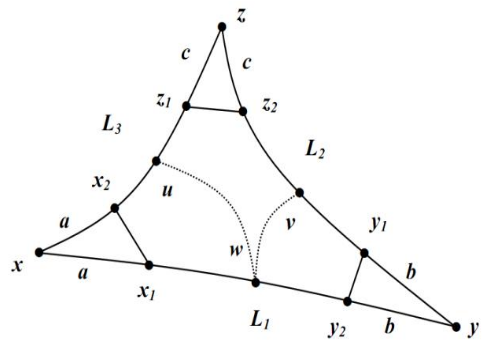
$$L_1 = d(x_1, y_2),\ L_2 = d(x_1, z_2),\ L_3 = d(z_1, x_2).$$

$$d(x, x_1) = a,\ d(y, y_1) = b,\ d(z, z_1) = c;$$

$$B_1 = B'\left(x, a + \frac{L_1}{2}\right),\ B_2 = B'\left(y, b + \frac{L_1}{2}\right)$$

Không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả sử rằng

$$L_1 \ge \max\{L_2, L_3\}.$$



Gọi $u = \partial B_1 \cap [x,z]$, $v = \partial B_2 \cap [y,z]$. Không giảm tổng quát, ta giả sử $d(z,u) \le d(z,v)$. Ta chứng minh

$$[u,z] \cap \operatorname{int} B_2 = \varnothing.$$

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng, tồn tại $s \in [u,z] \cap \operatorname{int} B_2$. Khi đó, ta chọn $t \in [v,z]$ sao cho

$$d(z,s) = d(z,t).$$

Suy ra

$$d(y,t) + d(t,z) = d(y,z) \le d(y,s) + d(s,z).$$

Do đó,

$$d(y,t) + d(t,z) = d(y,z) \le d(y,s) + d(t,z).$$

Bởi thế, $d(y,t) \le d(y,s)$. Mặt khác, vì $s \in \operatorname{int} B_2$ nên $d(y,s) < b + \frac{L_1}{2}$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Gọi w là điểm nằm giữa $[x_1, y_2]$. Khi đó, vì $B_1 \cap \operatorname{int} B_2 = \varnothing$ nên ta chọn một đường đi từ $w \to v$ nằm ngoài $\operatorname{int} B_2$, và chọn một đường đi từ $w \to x_1$ là đoạn $[w, x_1]$. Ta có,

- Nếu $a \le e_0$, thì ta chọn đường đi từ x_1 đến x_2 theo đường $p = [x_1, x] \cup [x, x_2]$. Khi đó, độ dài đường gấp khúc này là

$$l(p) \le 2e_0 \le 3e_0.$$

- Nếu $a > e_0$, thì ta chọn $M \in [x, x_1]$ sao cho

$$d(M, x_1) = e_0$$

và chọn $N \in [x, x_2]$ sao cho

$$d(N, x_2) = e_0.$$

Bây giờ, ta xét đường gấp khúc $\gamma = x_1 M N x_2$ như sau:

- Đường đi từ $x_1 \to M$ nằm trên $[x, y]$;

- Đường đi từ $M \to N$ là đường trắc địa nối M với N;

- Đường đi từ $N \to x_2$ nằm trên $[x, z]$.

Khi đó, độ dài của đường γ là $l(\gamma) \le 3e_0$ và $\gamma \subset \operatorname{int} B_1$, kéo theo $\gamma \cap \operatorname{int} B_2 = \varnothing$. Do đó,

$$\begin{aligned} e\left(\frac{L_1}{2}\right) < l(\gamma) &\le \frac{L_1}{2} + 3e_0 + L_1 + 3e_0 + \frac{L_1}{2} \\ &\le 2L_1 + 6e_0. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{e\left(\frac{L_1}{2}\right)}{\frac{L_1}{2}} \le 4 + \frac{12e_0}{L_1},$$

kéo theo

$$\frac{e\left(\frac{L_1}{2}\right)}{\frac{L_1}{2}} - \frac{6e_0}{\frac{L_1}{2}} \le 4.$$

Bởi thế, $\frac{L_1}{2} \le r_0$, và ta thu được $l_1 \le 2r_0$. Như vậy,

$$minsize(\Delta) \le 2r_0 + e_0.$$

3.2. Đánh giá

Chúng tôi tìm thêm được một hàm phân kỳ trắc địa có dạng mũ được thể hiện trong chứng minh của Định lí 3.1.1, cụ thể:

$$e(0) = \max\{9, \delta\}, e(r) = \frac{1}{2^{3+1/\delta}}.2^{r/\delta}.$$

Hơn nữa, nếu trong không gian metric trắc địa tồn tại hàm phân kỳ $e(r)$ sao cho $\frac{e(r)}{r} \to \infty$ khi $r \to \infty$, thì mọi tam giác trắc địa Δ trong X ta đều có

$$minsize(\Delta) \le 2r_0 + e_0.$$

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã chứng minh rằng tồn tại hàm phân kỳ trắc địa có dạng mũ trong không gian metric hyperbolic, và đưa ra điều kiện để một không gian metric trắc địa là không gian metric hyperbolic.

Tài liệu tham khảo

[1] Martin R. B. (1999), Metric spaces of non-positive curvature, *Springer-Verlag, Berlin*.

[2] Batty M. (2003), Notes on hyperbolic and automatic groups, *preprint*.

[3] Howie J. (2015), Hyperbolic Groups Lecture Notes, *preprint*.

DIVERGENT FUNCTIONS RELATED TO HYPERBOLIC FEATURE

Abstract: Let (X,d) be a metric space and $x_1,x_2\in X$. Then, an isometric embedding $\gamma:[0,d(x_1,x_2)]\to X$ such that $\gamma(0)=x_1$, $\gamma\left[d(x_1,x_2)\right]=x_2$ is called a geodesic between x_1,x_2. A metric space (X,d) is called a geodesic metric space if between every two points of X, there exists a geodesic, and a geodesic metric space (X,d) is called a hyperbolic metric space if every geodesic triangle in X is thin. In this paper, we prove that in the hyperbolic metric space X, there exists a geodesic diverge function $e:[0,\infty)\to$ ¡ satisfying $e(0)=\max\{9,\delta\}$, $e(r)=\frac{1}{2^{3+1/\delta}}.2^{r/\delta}$. Futhermore, we prove that in a geodesic metric space (X,d), if there exists a divergent function $e(r)$ such that $\frac{e(r)}{r}\to\infty$ as $r\to\infty$, then (X,d) is a hyperbolic metric space, and each geodesic triangle Δ in X has *minsize* $(\Delta)\le 2r_0+e_0$.

Key words: metric space; geodesic metric space; hyperbolic metric space; divergent function; thin.