UED Journal of Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG DÃY SỐ PHỤ ĐỂ GIẢI VÀ SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ

Nhận bài:
21 – 06 – 2016
Chấp nhận đăng:
25 – 09 – 2016
http://jshe.ued.udn.vn/

Phạm Quý Mười[a*], Nguyễn Hạ Vy[b]

Tóm tắt: Lý thuyết về dãy số thực là một phần cơ bản của giải tích toán học, các vấn đề cơ bản về dãy số bao gồm: khảo sát sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy, tính đơn điệu và tính bị chặn của dãy. Các bài toán cơ bản cũng tập trung vào các chủ đề trên. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu và trình bày phương pháp dùng dãy số phụ để giải và sáng tạo ra các bài toán về dãy số. Xuất phát từ một số bài toán cơ bản, chúng tôi đặt dãy số phụ để tạo ra các bài toán tổng quát và phức tạp hơn. Sau đó, với mỗi bài toán chúng tôi đều đưa ra phương pháp giải tổng quát và có ví dụ minh họa.

Từ khóa: dãy số; dãy số phụ; phương pháp dùng dãy số phụ; giải các bài toán về dãy số; sáng tạo các bài toán về dãy số.

1. Giới thiệu

Lý thuyết về dãy số thực là một phần cơ bản của giải tích toán học [2], các vấn đề cơ bản về dãy số bao gồm: khảo sát sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy, tính đơn điệu và tính bị chặn của dãy. Từ đó, các dạng bài tập cơ bản cũng tập trung vào các vấn đề này như tìm số hạng tổng quát của dãy số, khảo sát tính đơn điệu, tính bị chặn, chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy số.

Hơn nữa, trong các đề thi (đặc biệt là các đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh, quốc gia, quốc tế) một trong những yêu cầu của đề thi là các câu hỏi trong đề thi phải mới, không được lấy ở bất kỳ nguồn tài liệu nào và phải phù hợp với chương trình phổ thông. Điều này đòi hỏi người ra đề phải có kỹ năng sáng tạo ra các bài toán mới. Vì thế, trong bài báo này, chúng tôi trình bày phương pháp dùng dãy số phụ để sáng tạo ra các bài toán mới.

Việc giải và sáng tạo ra các bài toán về dãy số có thể có nhiều cách khác nhau. Trong bài báo này, chúng tôi tập trung giới thiệu phương pháp dùng dãy số phụ để sáng tạo các bài toán cơ bản về dãy số.

[a]Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng
[b]Trường THPT Nguyễn Trãi, Hội An
*** Liên hệ tác giả**
Phạm Quý Mười
Email: pqmuoi@ud.edu.vn

Chú ý rằng, phương pháp dùng dãy phụ (và các phương pháp khác) để giải các bài toán về dãy số đã được một số tác giả nghiên cứu và công bố trong các tài liệu [1,5,6,7]. Tuy nhiên, việc sử dụng phương pháp dãy phụ để sáng tạo ra các bài toán mới hầu như chưa được quan tâm chú ý và chúng tôi cũng chưa thấy một công trình nghiên cứu nào đã công bố về vấn đề này.

Bài báo này được trình bày như sau: Trong phần hai, chúng tôi sẽ trình bày phương pháp đặt dãy phụ để sáng tạo các bài toán về dãy số. Ở đây, chúng tôi sẽ trình bày ý tưởng của phương pháp và các ví dụ minh họa. Ứng với mỗi bài toán cơ bản, chúng tôi trình bày các phương pháp dùng dãy phụ để nhận được các bài toán mới khó hơn và trình bày cách giải của bài toán tương ứng. Cuối cùng, chúng tôi đưa ra kết luận và một số hướng nghiên cứu mới ở phần bốn.

2. Phương pháp dùng dãy số phụ để giải và sáng tạo các bài toán về dãy số

2.1. Ý tưởng

Ý tưởng cơ bản trong phương pháp đặt dãy số phụ để giải bài toán là: từ bài toán phức tạp ta dùng một (hoặc nhiều) dãy số phụ để đưa về bài toán đơn giản hơn hoặc đã biết phương pháp giải.

Vậy ngược lại, để sáng tạo ra được nhiều bài toán khác nhau, ta chỉ cần xuất phát từ các bài toán đơn giản, đặt dãy số phụ để nhận được những bài toán phức tạp hơn. Sau đây là một số ví dụ minh họa.

2.2. Từ cấp số nhân

Kết quả cơ bản: *Cho (u_n) là một cấp số nhân với u_1 và công bội q. Khi đó, công thức số hạng tổng quát là:* $u_n = qu_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$.

Để tạo ra các bài toán mới về tìm số hạng tổng quát, chúng ta có thể làm như sau:

• Ta đặt $u_n = v_n + c, n \in \mathbb{N}^*$ ta được dãy:

$$v_n = qv_{n-1} + p, n \in \mathbb{N}^*.$$

Như vậy, nếu chúng ta cho các giá trị c khác nhau ta sẽ có các bài toán khác nhau về tìm số hạng tổng quát. Chú ý rằng, dãy (v_n) chính là dãy sai phân cấp một mà chúng ta đã có phương pháp giải.

• Để nhận được các bài toán khó hơn, chúng ta tiếp tục đặt $v_n = \dfrac{1}{x_n}, n \in \mathbb{N}^*$, ta được:

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{px_{n-1} + q}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đây, chúng ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 2.1. *Cho dãy số (x_n) biết:*

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \alpha \neq 0 \\ x_n = \dfrac{x_{n-1}}{cx_{n-1} + d}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (x_n).

Phương pháp giải

Vì $x_1 = \alpha, \alpha \neq 0$ nên $x_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó ta có:

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{cx_{n-1} + d} \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} = c + \frac{d}{x_{n-1}}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Đặt $v_n = \dfrac{1}{x_n}, n \in \mathbb{N}^*$, ta được:

$$v_n = dv_{n-1} + c, n \in \mathbb{N}^*, \text{ với } v_1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Dãy (v_n) có dạng phương trình sai phân cấp một mà chúng ta đã biết cách giải.

• Tiếp tục đặt $x_n = y_n + \lambda, n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{px_{n-1} + q} \Leftrightarrow y_n + \lambda = \frac{y_{n-1} + \lambda}{p(y_{n-1} + \lambda) + q}$$

$$\Leftrightarrow y_n = \frac{y_{n-1}(1 - p\lambda) - \lambda^2 p + \lambda q + \lambda}{py_{n-1} + \lambda p + q}.$$

Đặt $a = 1 - p\lambda, b = -\lambda^2 p + \lambda q + \lambda, c = p, d = \lambda p + q$, ta có:

$$y_n = \frac{ay_{n-1} + b}{cy_{n-1} + d}, n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.2)$$

Như vậy vấn đề đặt ra ở đây là khi cho dãy số có công thức truy hồi dạng (2.2) làm sao để đưa về dạng (2.1). Từ (2.1) ta đặt $x_n = y_n + \lambda, n \in \mathbb{N}^*$ ta được (2.2) nên muốn từ (2.2) đưa về (2.1) ta chỉ cần đặt ngược lại: $y_n = x_n - \lambda = x_n + \alpha, n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $y_n = x_n + \alpha, n \in \mathbb{N}^*$ thay vào (2.2) ta có:

$$x_n + \alpha = \frac{a(x_n + \alpha) + b}{c(x_n + \alpha) + d}$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{(a - ac)x_n - c\alpha^2 + (a - d)\alpha + b}{c(x_n + \alpha) + d}.$$

Muốn đưa về được (2.1), ta chọn α sao cho

$$-c\alpha^2 + (a - d)\alpha + b = 0.$$

Để phương trình trên có nghiệm thì

$$(a - d)^2 + 4bc \geq 0.$$

Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 2.2. *Cho dãy số (x_n) biết:*

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_n = \dfrac{au_{n-1} + b}{cu_{n-1} + d}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Trong đó $(a - d)^2 + 4bc \geq 0.$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n)

Phương pháp giải

Đặt $u_n = v_n + \alpha, n \in \mathbb{N}^*$, với α là nghiệm của phương trình $-c\alpha^2 + (a-d)\alpha + b = 0.$

Biến đổi thu gọn về Bài toán 2.1

Ví dụ 2.1. *Cho dãy số (x_n) biết:*

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2014}{2016 - x_n}, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad (2.3)$$

a)Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

b) Cho $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x_k - 2014}$, *Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n+2016}$.

Giải

a) Chọn α là nghiệm của phương trình:

$\alpha^2 - 2015\alpha + 2014 = 0.$

Ta có: $\left[\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \alpha = 2014 \end{array}\right.$.

Đặt $x_n = y_n + 1, n \in \mathbb{N}$, ta có $y_0 = -1$.

Thay vào (2.3) ta có:

$$y_{n+1} = \frac{2y_n}{2015 - y_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{2015}{2y_n} - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

Đặt $u_n = \dfrac{1}{y_n}, n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$u_{n+1} = \frac{2015}{2}u_n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}, \text{ với } u_0 = -1.$$

Đặt $u_n = v_n + \dfrac{1}{2013}, n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$v_{n+1} = \frac{2015}{2}v_n, n \in \mathbb{N}, \text{ với } v_0 = -\frac{2014}{2013}.$$

Nên $v_n = -\dfrac{2014}{2013}\left(\dfrac{2015}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}.$

Suy ra:

$$u_n = -\frac{2014}{2013}\left(\frac{2015}{2}\right)^n + \frac{1}{2013}$$

$$= \frac{2^n - 2014.2015^n}{2013.2^n}, n \in \mathbb{N}.$$

$$y_n = \frac{2013.2^n}{2^n - 2014.2015^n}, n \in \mathbb{N}.$$

$$x_n = \frac{2014.2^n - 2014.2015^n}{2^n - 2014.2015^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2014.2^n - 2014.2015^n}{2^n - 2014.2015^n} = 1.$

b) Ta có:

$$x_k - 2014 = \frac{2014^2.2015^k - 2014.2015^k}{2^k - 2014.2015^k}$$

$$= \frac{2014.2013.2015^k}{2^k - 2014.2015^k}.$$

Nên: $\dfrac{1}{x_k - 2014} = \dfrac{1}{2014.2013}\left(\dfrac{2}{2015}\right)^k - \dfrac{1}{2013}.$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k - 2014}$$

$$= \frac{1}{2014.2013}\left(\left(\frac{2}{2015}\right)^0 + \left(\frac{2}{2015}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{2}{2015}\right)^n\right) - \frac{n+1}{2013}$$

$$= \frac{2015}{2014.2013^2}\left(1 - \left(\frac{2}{2015}\right)^{n+1}\right) - \frac{n+1}{2013}.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n+2015} = -\dfrac{1}{2013}.$

2.3. Từ bài toán có công thức truy hồi cấp một có dạng lượng giác

2.3.1. Trước tiên ta xét dãy số có công thức truy hồi cấp một có dạng công thức cos2a

Bài toán cơ bản: *Cho dãy số (u_n) biết:*

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = 2u_n^2 - 1, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n).

Bài toán này đơn giản và đã biết cách giải [1, tr.10].

Ở đây ta quan tâm đến việc biến đổi bài toán trên để nhận được các bài toán phức tạp hơn. Ta có thể dùng các dãy số phụ như sau:

• Đặt $u_n = kv_n, n \in \mathbb{N}^*$, ta được:

$$v_{n+1} = 2kv_n^2 - \frac{1}{k}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $a = 2k, b = -\frac{1}{k}$, ta có $ab = -2$. Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.1. *Cho dãy số (v_n) biết:*

$$\begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_{n+1} = av_n^2 + b, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Trong đó $ab = -2$ hoặc $b = 0$.

Tìm số hạng tổng quát của dãy (v_n).

Phương pháp giải

Nếu $b = 0$ thì $v_{n+1} = a^{2^n - 1}.\alpha^{2^n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Nếu $ab = -2$ thì đặt $v_n = -bu_n, n \in \mathbb{N}^*$.

• Cho α, a, b các giá trị cụ thể ta có các ví dụ sau

Ví dụ 3.1. *Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n), biết:*

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n^2 - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Giải.

Đặt $u_n = -bv_n = \frac{1}{2}v_n, n \in \mathbb{N}^*$.

Thay vào (3.1), ta có:

$$v_1 = 4, \; v_{n+1} = 2v_n^2 - 1, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta dễ dàng tìm được:

$$v_n = \frac{1}{2}\left(a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right), n \in \mathbb{N}^*,$$

với a là nghiệm của phương trình

$$4 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Vậy

$$u_n = \frac{1}{4}\left(a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\left(4+\sqrt{15}\right)^{2^{n-1}} + \left(4-\sqrt{15}\right)^{2^{n-1}}\right), n \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 3.2. *Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n), biết:*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Giải

Đặt $u_n = -bv_n = 2v_n, n \in \mathbb{N}^*$.

Thay vào (3.2), ta có:

$$v_1 = \frac{1}{2}, \; v_{n+1} = 2v_n^2 - 1, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta dễ dàng tìm được: $v_n = \cos\frac{2^{n-1}\pi}{3}, n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $u_n = 2\cos\frac{2^{n-1}\pi}{3}, n \in \mathbb{N}^*$.

• Trong Bài toán 3.1 tiếp tục đặt $v_n = x_n + \lambda, n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$v_{n+1} = a_1 v_n^2 + b_1, n \in \mathbb{N}^*$$
$$\Leftrightarrow x_{n+1} + \lambda = a\left(x_n + \lambda\right)^2 + b_1, n \in \mathbb{N}^*$$
$$\Leftrightarrow x_{n+1} = a_1 x_n^2 + 2a_1\lambda x_n + a_1\lambda^2 + b_1 - \lambda, n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $a = a_1, b = 2a_1\lambda, c = a_1\lambda^2 - \lambda + b_1$, ta có:

$$x_{n+1} = ax_n^2 + bx_n + c, n \in \mathbb{N}^*.$$

Tuy nhiên không phải với mọi a, b, c đều có thể đưa về Bài toán 3.1, ta tìm mối quan hệ giữa a,b, c.

Ta có $a_1 b_1 = -2$ hoặc $b_1 = 0$. Nên

$$c = a_1\lambda^2 - \lambda + b_1 = \frac{4a_1^2\lambda^2 - 4a_1\lambda + 4a_1 b_1}{4a_1}$$
$$= \frac{b^2 - 2b - 8}{4a}, a \neq 0$$

hoặc $c=\dfrac{b^2-2b}{4a}, a\neq 0.$

Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.2. *Cho dãy số (v_n) biết:*

$$\begin{cases} x_1=\alpha \\ x_{n+1}=ax_n^2+bx_n+c, n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Trong đó $a\neq 0, c=\dfrac{b^2-2b-8}{4a}$

hoặc $c=\dfrac{b^2-2b}{4a}.$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (x_n).

Phương pháp giải

Nhận xét rằng từ Bài toán 3.1 ta đặt $v_n=x_n+\lambda, n\in\mathbb{N}^*$, ta đưa về Bài toán 3.2 mà theo biến đổi trên ta có $\lambda=\dfrac{b}{2a}$, vậy để đưa Bài toán 3.2 về Bài toán 3.1 ta đặt $x_n=v_n-\dfrac{b}{2a}, n\in\mathbb{N}^*.$

Cho α, a, b các giá trị cụ thể, rồi tính c theo a, b ta có các ví dụ sau:

Ví dụ 3.3. *Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n), biết:*

$$\begin{cases} u_1=2, \\ u_n=2u_{n-1}^2+4u_{n-1}+1, n\in\mathbb{N}, n\geq 2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Giải.

Đặt $u_n=v_n-\dfrac{b}{2a}=v_n-1, n\in\mathbb{N}^*.$

Thay vào (3.3), ta có:

$v_1=3$, $v_n=2v_{n-1}^2, n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$

Ta có: $v_n=2v_{n-1}^2=2\left(2v_{n-2}^2\right)^2=2.2^2.v_{n-2}^{2^2}$

$$=2.2^2.\left(2v_{n-3}^2\right)^{2^2}=2.2^2.2^{2^2}.v_{n-3}^{2^3}$$

$$=...=2.2^2.2^{2^2}...2^{2^{n-2}}.v_1^{2^{n-1}}=2^{\frac{1-2^{n-1}}{1-2}}.v_1^{2^{n-1}}$$

$$=2^{2^{n-1}-1}.3^{2^{n-1}}=\frac{1}{2}6^{2^{n-1}}, n\in\mathbb{N}^*.$$

Vậy $u_n=\dfrac{1}{2}6^{2^{n-1}}-1, n\in\mathbb{N}^*.$

Ví dụ 3.4. *Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n), biết:*

$$\begin{cases} u_1=2, \\ u_n=2u_{n-1}^2+4u_{n-1}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Giải

Đặt $u_n=v_n-\dfrac{b}{2a}=v_n-1, n\in\mathbb{N}^*.$

Thay vào (3.4), ta có:

$v_1=3$, $v_n=2v_{n-1}^2-1, n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$

Ta dễ dàng tìm được:

$$v_n=\frac{1}{2}\left(a^{2^{n-1}}+\frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right), n\in\mathbb{N}^*,$$

với a là nghiệm của phương trình

$$3=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right).$$

Vậy

$$u_n=\frac{1}{2}\left(a^{2^{n-1}}+\frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right)-1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}\right)-1, n\in\mathbb{N}^*.$$

• Trong Bài toán 3.2 tiếp tục đặt $x_n=\dfrac{1}{y_n}, n\in\mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{a}{y_n^2}+\frac{b}{y_n}+c \Leftrightarrow y_{n+1}=\frac{y_n^2}{cy_n^2+by_n+a}, n\in\mathbb{N}^*.$$

Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.3. *Cho dãy số (v_n) biết:*

$$\begin{cases} y_1=\alpha\neq 0 \\ y_{n+1}=\dfrac{y_n^2}{cy_n^2+by_n+a}, n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Trong đó $a \neq 0, c = \dfrac{b^2 - 2b - 8}{4a}$

hoặc $c = \dfrac{b^2 - 2b}{4a}$.

Tìm số hạng tổng quát của dãy (y_n).

Phương pháp giải

Đặt $y_n = \dfrac{1}{x_n}, n \in \mathbb{N}^*$, biến đổi về Bài toán 3.2.

2.3.2. Ta xét tiếp dãy số có công thức truy hồi cấp một có dạng công thức cos3a

Bài toán cơ bản: *Cho dãy số* (u_n) *biết:*

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = 4u_n^3 \pm 3u_n, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n).

Bài toán này ta đã biết phương pháp giải, xem [1, Tr.13-15].

Tương tự như các phần trên, chúng ta quan tâm đến việc biến đổi bài toán để nhận được các bài toán phức tạp hơn.

• Đặt $u_n = kv_n, n \in \mathbb{N}^*$, ta được:

$$v_{n+1} = 4k^2u_n^3 \pm 3u_n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $a = 4k^2$. Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.4. *Cho dãy số* (v_n) *biết:*

$$\begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_{n+1} = av_n^3 \pm 3v_n, n \in \mathbb{N}^*, a > 0. \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (v_n).

Phương pháp giải

Đặt $v_n = \dfrac{2}{\sqrt{a}}u_n, n \in \mathbb{N}^*$.

Biến đổi thu gọn đưa về bài toán đã biết cách giải.

• Cho α, a, b các giá trị cụ thể ta có các ví dụ sau:

Ví dụ 3.5. *Tìm số hạng tổng quát của dãy* (u_n), *biết:*

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_n = 2u_{n-1}^3 - 3u_{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Giải

Đặt $u_n = \dfrac{2}{\sqrt{a}}v_n = \sqrt{2}v_n, n \in \mathbb{N}^*$.

Thay vào (3.5), ta có:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ v_n = 4v_{n-1}^3 - 3v_{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Ta dễ tìm được: $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$,

$$v_n = \cos\left(3^{n-1}.\frac{\pi}{4}\right), n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $u_n = \sqrt{2}\cos\left(3^{n-1}.\dfrac{\pi}{4}\right), n \in \mathbb{N}^*$.

• Trong Bài toán 3.4 tiếp tục đặt $v_n = x_n + \lambda, n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$x_{n+1} = ax_n^3 + 3a\lambda x_n^2 + 3\left(a\lambda^2 \pm 1\right)x_n + a\lambda^3 \pm 3\lambda - \lambda, n \in \mathbb{N}^*$$

Đặt $b = 3a\lambda, c = 3\left(a\lambda^2 \pm 1\right), d = a\lambda^3 \pm 3\lambda - \lambda$,

ta có: $x_{n+1} = ax_n^3 + bx_n^2 + cx_n + d, n \in \mathbb{N}^*$.

Tuy nhiên không phải với mọi a, b, c, d đều có thể đưa về Bài toán 3.4, ta tìm mối quan hệ giữa a, b, c, d.

Ta có $b = 3a\lambda \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{b}{3a}, a \neq 0$. Nên ta có:

$$c = 3\left(\frac{b^2}{9a} \pm 1\right), d = \frac{b^3}{27a^2} \pm \frac{b}{a} - \frac{b}{3a}$$

Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.5. *Cho dãy số* (x_n) *biết:*

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_{n+1} = ax_n^3 + bx_n^2 + cx_n + d, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Trong đó: b tùy ý

$$c = 3\left(\frac{b^2}{9a} \pm 1\right), d = \frac{b^3}{27a^2} \pm \frac{b}{a} - \frac{b}{3a}, a \neq 0,$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (x_n).

Phương pháp giải

Nhận xét rằng từ Bài toán 3.4 ta đặt $v_n = x_n + \lambda, n \in \mathbb{N}^*$, để đưa về Bài toán 3.5, mà theo biến đổi trên ta có $\lambda = \frac{b}{3a}$, vậy để đưa Bài toán 3.5 về Bài toán 3.4 ta đặt $x_n = v_n - \frac{b}{3a}, n \in \mathbb{N}^*$.

• Cho α, a, b các giá trị cụ thể, rồi tính c, d theo a, b ta có các ví dụ sau:

Ví dụ 3.6. *(Đề thi OLYMPIC 30/04/2004)*

Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n)*, biết:*

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{\sqrt{6}}, \\ u_{n+1} = 24u_n^3 - 12\sqrt{6}u_n^2 + 15u_n - \sqrt{6}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (3.6)$$

Giải

Đặt $u_n = v_n - \frac{b}{3a} = v_n + \frac{1}{\sqrt{6}}, n \in \mathbb{N}^*$.

Thay vào (3.6), ta có:

$$v_1 = \frac{2}{\sqrt{6}},\ v_{n+1} = 24v_n^3 + 3v_n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $v_n = \frac{2}{\sqrt{a}} y_n = \frac{1}{\sqrt{6}} y_n, n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $y_1 = 2$.

$$y_{n+1} = 4y_n^3 + 3y_n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta dễ tìm được: $y_n = \frac{1}{2}\left(a^{3^{n-1}} - \frac{1}{a^{3^{n-1}}}\right), n \in \mathbb{N}^*$,

với a là nghiệm của phương trình:

$$2 = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right).$$

Vậy

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\left(\sqrt{5}+2\right)^{3^{n-1}} - \left(\sqrt{5}-2\right)^{3^{n-1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}, n \in \mathbb{N}^*.$$

3.Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã trình bày phương pháp đặt dãy số phụ để sáng tạo các bài toán về dãy số, xây dựng được một số bài toán tổng quát và phương pháp giải các bài toán đó.

Cần nhấn mạnh rằng: Đa số các tài liệu khác đưa ra bài toán tổng quát với việc áp đặt các điều kiện của tham số và cách giải ở bài toán không tự nhiên, không giải thích được vì sao nghĩ ra được cách giải đó. Với phương pháp dùng dãy số phụ như trên, chúng tôi đã sáng tạo ra các bài toán mới, bài toán tổng quát và có phương pháp giải tổng quát cho các bài toán đó giúp cho học sinh dễ dàng tiếp thu và áp dụng.

Ngoài phương pháp đặt dãy số phụ trên, ta có thể dùng các phương pháp khác để sáng tạo ra các bài toán mới: phương pháp đặc biệt hóa, phương pháp tổng quát hóa, phương pháp hàm số…

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Tài Chung (2013), Chuyên khảo dãy số, *Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội*.

[2] Jean – Marie Monier, Lý Hoàng Tú dịch (2000), Giáo trình Giải tích, *Nhà xuất bản Giáo dục*.

[3] Kaczor W.J, Nowak M.T, Nhóm Đoàn Chi dịch (2002), Bài tập Giải tích 1 – Số thực, dãy số và chuỗi số, *Nhà xuất bản Đại học Sư phạm*.

[4] Nguyễn Tài Chung (2015), Giới hạn của các dãy số sinh bởi tổng, *Kỷ yếu các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi khu vực duyên hải Nam Trung Bộ và Tây Nguyên, Tháng 03/2015, tr.46-57*.

[5] Trần Nam Dũng, Dãy số và các bài toán về dãy số, *http://luanvan.net.vn, truy cập ngày 22/06/2015.*

[6] Trương Ngọc Đắc, Một số phương pháp xây dựng dãy số, *http://xemtailieu.com, truy cập ngày 22/03/2016*

[7] Nguyễn Tất Thu, Một số phương pháp xác định công thức tổng quát của dãy số, *http://xemtailieu.com, truy cập ngày 08/04/2015.*

METHOD OF USING SECONDARY SEQUENCES TO SOLVE AND CREATE SEQUENCE PROBLEMS

Abstract: The theory of real sequences is a basic part of calculus; the fundamental issues of real sequences include investigating convergence and discovering the limits of sequences, the monotonicity and the boundedness of sequences. Basic problems also concentrate on these topics. In this article, we investigate and present a method of using secondary sequences to solve and create problems of sequences. Starting from some basic problems, we introduce secondary sequences to create more general and complicated problems. Then, for each of the problems, we present a general solving method together with examples for illustration.

Key words: sequences; secondary sequences; secondary sequence method; solving sequence problems; creating new sequence problems.