UED Journal of Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

TÍNH HYPERBOLIC CỦA KHÔNG GIAN H^n

Lương Quốc Tuyển[a*], Lê Thị Thu Nguyệt[a]

Nhận bài:
07 – 03 – 2016
Chấp nhận đăng:
20 – 06 – 2016
http://jshe.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Giả sử $u=(u_1, u_2..., u_{n+1})$, $v=(v_1, v_2..., v_{n+1}) \in R^{n+1}$, ta đặt $\langle u|v\rangle = -u_{n+1}v_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$; $H^n = \{u=(u_1, u_2,..., u_n, u_{n+1}) \in R^{n+1} : \langle u|u\rangle = -1, u_{n+1} > 0\}$, và giả sử $d: H^n \times H^n \to R$ là hàm được gán cho mỗi cặp $(A,B) \in H^n \times H^n$ với duy nhất số không âm $d(A,B) \geq 0$ sao cho $\cosh d(A,B) = -\langle A|B\rangle$. Khi đó, d là một metric trên H^n. Trong [3], các tác giả đã chứng minh được rằng mỗi không gian metric H^2 là không gian metric hyperbolic và mỗi tam giác trắc địa trong H^2 là δ - thin với $\delta = 1$. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh kết quả tổng quát cho không gian metric H^n và mọi tam giác trắc địa trong H^n là δ - thin với $\delta = \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2} < 1$. Điều này chứng tỏ rằng, δ được chúng tôi đưa ra trong bài báo này tốt hơn so với $\delta = 1$ được các tác giả khác đưa ra trong [3].

Từ khóa: không gian metric trắc địa; không gian metric H^n; tam giác trắc địa; hyperbolic; δ - thin.

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi đã chứng minh được kết quả tổng quát hơn rằng H^n là không gian hyperbolic. Hơn nữa, chúng tôi cũng đã chứng minh được rằng mọi tam giác trong H^n là δ - thin với

$$\delta = \ln\frac{3+\sqrt{5}}{5} < 1.$$

Như vậy, δ được đưa ra trong bài báo này tốt hơn so với các kết quả của các tác giả đi trước.

Lý thuyết nhóm hình học được nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm từ những năm 90 của thế kỷ trước đến nay. Qua đó, các nhà toán học đã thu được rất nhiều kết quả liên quan đến không gian metric trắc địa và không gian metric hyperbolic. Đặc biệt, trong [3], các tác giả đã xây dựng không gian metric H^2 và chứng tỏ rằng mỗi tam giác trắc địa là 1-thin. Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng kết quả trên cho không gian metric H^n.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lý thuyết

2.1.1. Không gian metric hyperbolic

Giả sử (X,d) là không gian metric,

$$p:[0,1] \to X$$

là một đường, $\pi = [t_0 = 0, t_1, ..., t_n = 1]$ là một phân hoạch của $[0,1]$ và

$$l_\pi = \sum_{i=1}^{n} d\left[p(t_{i-1}), p(t_i)\right].$$

Khi đó, nếu tồn tại $l(p) = \sup_\pi l_\pi$, thì ta nói p là đường *cầu trường được* và $l(p)$ được gọi là *độ dài* của p. Đặt

$$\Gamma = \{p : p \text{ là đường cầu trường được}\}.$$

Không gian (X,d) được gọi là *không gian metric đường* hay *không gian metric độ dài* nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$, ta có

[a] *Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*
*** Liên hệ tác giả**
Lương Quốc Tuyển
Email: tuyendhdn@gmail.com

$$d(x_1,x_2)=\inf\left\{l(p):p\in\Gamma,p \text{ nối } x_1,x_2\right\}.$$

Giả sử (X,d) là không gian metric, $x_1,x_2\in X$. Khi đó, một phép nhúng đẳng cự $\gamma:[0,d(x_1,x_2)]\to X$ sao cho

$$\gamma(0)=x_1,\gamma\left[d(x_1,x_2)\right]=x_2$$

được gọi là *một trắc địa* giữa x_1,x_2.

Không gian metric X được gọi là *không gian metric trắc địa* nếu với hai điểm bất kỳ của X, tồn tại một trắc địa giữa chúng.

Không gian metric trắc địa (X,d) được gọi là *không gian hyperbolic* nếu mọi tam giác trắc địa trong X là thin.

2.1.2. Không gian H^n

Với mọi $u,v\in R^{n+1}$, trong đó

$$u=(u_1,...,u_{n+1}),v=(v_1,...,v_{n+1}),$$

ta đặt

$$\langle u\,|\,v\rangle=-u_{n+1}v_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}u_iv_i;$$

$$H^n=\left\{\mathrm{u}=(u_1,u_2,...,u_n,u_{n+1})\in R^{n+1}:\langle u\,|\,u\rangle=-1,u_{n+1}>0\right\};$$

và đặt

$$d:H^n\times H^n\to R$$
$$(A,B)\text{ a }\quad d(A,B)$$

trong đó $d(A,B)\ge 0$ được xác định như sau.

$$\cosh d(A,B)=-\langle A\,|\,B\rangle.$$

Khi đó, d là một metric, và (H^n,d) là một không gian metric.

Nhận xét. Với mọi $u,v\in H^n$, ta có

$$\langle u\,|\,v\rangle\le -1;\ \langle u\,|\,v\rangle=1\Leftrightarrow u=v.$$

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết trong quá trình thực hiện bài báo. Nghiên cứu các tài liệu của những tác giả đi trước, làm yếu giả thiết để thu được kết quả tổng quát hơn.

3. Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

3.1.1. Bổ đề. Giả sử $A\in H^n$. *Khi đó, tồn tại* $u\in R^{n+1}$ *sao cho* $\langle u\,|\,u\rangle=1$ *và* $\langle A\,|\,u\rangle=0$. *Hơn nữa, với mọi* $B\in H^n$, $B\ne A$, *ta có*

$$B=\left[\cosh d(A,B)\right]A+\left[\sinh d(A,B)\right]u.$$

Chứng minh. Lấy $B\in H^n$, $B\ne A$ và

$$u'=(1-t)A+t\,B.$$

Khi đó,

$$\langle A\,|\,u'\rangle=0\Leftrightarrow\langle A\,|\,(1-t)A+t\,B\rangle=0$$
$$\Leftrightarrow -(1-t)+t\langle A\,|\,B\rangle=0$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{1+\langle A\,|\,B\rangle}.$$

Như vậy,

$$u'=\frac{\langle A\,|\,B\rangle}{1+\langle A\,|\,B\rangle}A+\frac{1}{1+\langle A\,|\,B\rangle}B.$$

Đặt $u''=B+\langle A\,|\,B\rangle$ và $u=\alpha u''$. Khi đó,

$$\langle u\,|\,u\rangle=\alpha^2\langle u''\,|\,u''\rangle=1$$
$$\Leftrightarrow\alpha=\sqrt{\frac{1}{\langle u''\,|\,u''\rangle}}=\sqrt{\frac{1}{\langle A\,|\,B\rangle^2-1}}.$$

Do đó, nếu ta đặt

$$u=\sqrt{\frac{1}{\langle A\,|\,B\rangle^2-1}}\left(\langle A\,|\,B\rangle A+B\right),$$

thì ta thu được

$$\langle u\,|\,u\rangle=1\text{ và }\langle A\,|\,u\rangle=0.$$

Cuối cùng, vì $\cosh d(A,B)=-\langle A\,|\,B\rangle$ và

$$\cosh^2 d(A,B)-\sinh^2 d(A,B)=1$$

nên ta suy ra

$$\sinh d(A,B)=\sqrt{\langle A\,|\,B\rangle^2-1}.$$

Do đó,

$$B=\left[\cosh d(A,B)\right]A+\left[\sinh d(A,B)\right]u.$$

3.1.2. Định lí

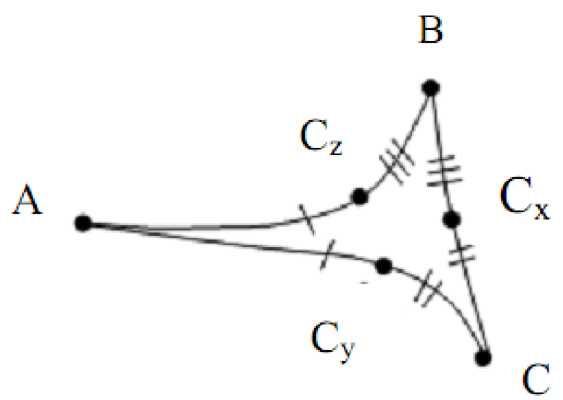
H^n là không gian metric hyperbolic.

Chứng minh. Giả sử ABC là tam giác trắc địa bất kỳ của không gian H^n và C_x, C_y, C_z là các điểm trong tương ứng.

Trước tiên, ta tìm một cận trên của $diam\{C_x, C_y, C_z\}$. Thật vậy, ta đặt

$$a = d(B,C), b = d(C,A), C = d(A,B);$$

$$x = d(A,C_y) = d(A,C_z);$$
$$y = d(B,C_z) = d(B,C_x);$$
$$z = d(C,C_x) = d(C,C_y).$$



Khi đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+z=b \\ z+y=a \\ x+y=c. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được:

$$\begin{cases} x = \dfrac{b+c-a}{2} \\ y = \dfrac{c+a-b}{2} \\ z = \dfrac{a+b-c}{2}. \end{cases}$$

Theo Bổ đề 3.1.1, tồn tại $u, v \in R^{n+1}$ với

$$u = \frac{1}{\sqrt{\langle A|C\rangle^2 - 1}}\left(\langle A|C\rangle A + C\right),$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\langle A|B\rangle^2 - 1}}\left(\langle A|B\rangle A + B\right),$$

$$\langle u|u\rangle = 1,\ \langle A|u\rangle = 0,$$

$$\langle v|v\rangle = 1,\ \langle A|v\rangle = 0.$$

Do vậy,

$$\langle u|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle A|C\rangle^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{\langle A|B\rangle^2 - 1}} \times \times\left(\langle C|B\rangle + \langle A|C\rangle\langle A|B\rangle\right) \quad (1)$$

Tiếp tục sử dụng Bổ đề 3.1.1, ta thu được

$$C_y = (\cosh x)A + (\sinh x)u = \left(\cosh\frac{b+c-a}{2}\right)A + \left(\sinh\frac{b+c-a}{2}\right)u.$$

$$C_z = (\cosh x)A + (\sinh x)v = \left(\cosh\frac{b+c-a}{2}\right)A + \left(\sinh\frac{b+c-a}{2}\right)v.$$

Suy ra

$$\langle C_y|C_z\rangle = -\cosh^2\frac{b+c-a}{2} + +\sinh^2\frac{b+c-a}{2}\langle u|v\rangle. \quad (2)$$

Mặt khác, bởi vì

$$-\langle A|B\rangle = \cosh c,$$
$$-\langle A|C\rangle = \cosh b,$$
$$-\langle B|C\rangle = \cosh a.$$

nên từ (1) và (2) ta suy ra

$$\langle u|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 b - 1}\sqrt{\cosh^2 c - 1}} \times \times(-\cosh a + \cosh b\cosh c) = \frac{1}{\sinh b\sinh c}(-\cosh a + \cosh b\cosh c).$$

Do vậy, ta có

$$\cosh d(C_y, C_z) = -\langle C_y \mid C_z \rangle =$$

$$= \cosh^2 \frac{b+c-a}{2} + \sinh^2 \frac{b+c-a}{2} \times$$

$$\frac{1}{\sinh b.\sinh c}(\cosh a - \cosh b \cosh c)$$

$$= 1 + \sinh^2 \frac{b+c-a}{2} \times$$

$$\left[1 + \frac{1}{\sinh b \sinh c}(\cosh a - \cosh b \cosh c)\right]$$

$$= 1 + \sinh^2 \frac{b+c-a}{2} . \frac{1}{\sinh b \sinh c} \times$$

$$(\sinh b \sinh c + \cosh a - \cosh b \cosh c).$$

Bởi vì

$$\cosh(b-c) = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c$$

nên ta có

$$\cosh d(C_y, C_z) =$$

$$1 + \sinh^2 \frac{b+c-a}{2} . \frac{1}{\sinh b \sinh c} \left[\cosh a - \cosh(b-c)\right].$$

Hơn nữa, vì

$$\cosh a - \cosh(b-c) = 2 \sinh \frac{a+b-c}{2} \sinh \frac{a-b+c}{2}$$

nên ta có

$$\cosh d(C_y, C_z) = 1 + 2\sinh^2 \frac{b+c-a}{2} \times$$

$$\frac{\sinh \frac{a+b-c}{2} \sinh \frac{a+c-b}{2}}{\sinh b \sinh c}.$$

Bởi vì $b = \frac{b+c-a}{2} + \frac{a+b-c}{2}$ nên ta thu được

$$\sinh b = \sinh \frac{b+c-a}{2} \cosh \frac{b+c-a}{2}$$

$$+ \cosh \frac{b+c-a}{2} \sinh \frac{a+b-c}{2}$$

$$\geq \sinh \frac{b+c-a}{2} \sinh \frac{a+b-c}{2}$$

$$+ \sinh \frac{b+c-a}{2} \sinh \frac{a+b-c}{2}$$

$$\geq 2 \sinh \frac{b+c-a}{2} \sinh \frac{a+b-c}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{\sinh \frac{b+c-a}{2} \sinh \frac{a+b-c}{2}}{\sinh b} \leq \frac{1}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được rằng

$$\frac{\sinh \frac{b+c-a}{2} \sinh \frac{a+c-b}{2}}{\sinh c} \leq \frac{1}{2}.$$

Như vậy,

$$\cosh d(C_y, C_z) \leq 1 + 2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

kéo theo

$$\frac{e^{d(C_y, C_z)} + e^{-d(C_y, C_z)}}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Giải bất phương trình trên ta thu được

$$0 \leq e^{d(C_y, C_z)} \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Như vậy,

$$diam\{C_x, C_y, C_z\} \leq \mathrm{d}\left(C_y, C_z\right)$$

$$\leq \ln \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 1.$$

3.2. Đánh giá

Trong [3], các tác giả đã chứng tỏ rằng H^2 là không gian metric hyperbolic, và mọi tam giác là δ - thin với $\delta = 1$. Trong bài báo này, chúng tôi đã chứng minh được kết quả tổng quát hơn rằng H^n là không gian metric hyperbolic. Hơn nữa, chúng tôi cũng đã chứng minh được rằng mọi tam giác trong H^n là δ - thin với

$$\delta = \ln \frac{3+\sqrt{5}}{5} < 1.$$

Như vậy, δ được đưa ra trong bài báo này tốt hơn so với các kết quả của các tác giả đi trước.

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã chứng minh được rằng H^n là không gian metric hyperbolic và mọi tam giác trong H^n là δ - thin với $\delta = \ln \frac{3+\sqrt{5}}{5} < 1$.

Tài liệu tham khảo

[1] Martin R. B. (1999), Metric spaces of non-positive curvature, Springer-Verlag, Berlin.

[2] Batty M. (2003), Notes on hyperbolic and automatic groups, http://www.academia.edu/182087/Notes_on_Hyperbolic_and_Automatic_Groups.

[3] Howie J. (2015), Hyperbolic Groups Lecture Notes, http://www.macs.hw. ac.uk/~jim/samos.pdf.

HYPERBOLICITY OF SPACE H^n

Abstract: Let us assume $u=(u_1, u_2..., u_{n+1})$, $v=(v_1, v_2..., v_{n+1}) \in R^{n+1}$, we put $\langle u \mid v\rangle = -u_{n+1}v_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$; $H^n = \{u=(u_1, u_2,..., u_n, u_{n+1}) \in R^{n+1}: \langle u \mid u\rangle = -1, u_{n+1}>0\}$, and let $d: H^n \times H^n \to R$ be the function that assigns to each pair $(A,B) \in H^n \times H^n$ the unique non-negative number $d(A,B) \geq 0$ such that $\cosh d(A,B) = -\langle A \mid B\rangle$. Then, d is a metric on H^n. In [3], the authors proved that each metric space H^2 is a hyperbolic metric space and each geodesic triangle in H^2 is δ - thin with $\delta = 1$. In this paper, we prove that the total results for the metric space H^n and every geodesic triangle in H^n are δ - thin with $\delta = \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2} < 1$. This proves that δ given in this paper is better than $\delta = 1$ given by other authors in [3].

Key words: geodesic metric space; metric space H^n; geodesic triangle; hyperbolic; δ - thin.