UED Journal of Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

Nhận bài:
16 – 02 – 2016
Chấp nhận đăng:
18 – 06 – 2016
http://jshe.ued.udn.vn/

MỘT PHÂN LỚP THEO MỘT SỐ LỚP CON CỦA CÁC TOÁN TỬ T-CHUẨN VÀ T-ĐỐI CHUẨN TRÊN CÁC TẬP MỜ TRỰC CẢM

Roãn Thị Ngân

Tóm tắt: Sự phân lớp theo các lớp con các toán tử t-chuẩn và t-đối chuẩn là một kết quả quan trọng trong lôgic mờ. Toán tử t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được và t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được đã được định nghĩa và tìm hiểu bởi Deschrijver G cùng cộng sự [8]. Trong bài báo này, tôi giới thiệu lần đầu một phân lớp theo các lớp con của các toán tử t-chuẩn biểu diễn được và t-đối chuẩn biểu diễn được cho các tập mờ trực cảm. Các tính chất của các lớp con này cũng được trình bày.

Từ khóa: tập mờ trực cảm; toán tử lôgic mờ trực cảm; t-chuẩn mờ trực cảm; t-đối chuẩn mờ trực cảm; t-chuẩn mờ trực cảm t- biểu diễn được; t-đối chuẩn mờ trực cảm t- biểu diễn được;

1. Giới thiệu

Năm 1983, K.T. Atanassov đã đề xuất khái niệm tập mờ trực cảm là một mở rộng trực tiếp của khái niệm tập mờ Lotfi Zadel (1965). Tiếp nối các thành tựu ứng dụng quan trọng của lý thuyết mờ, lý thuyết mờ trực cảm cũng dần khẳng định tính hữu hiệu trong các bài toán thực tế như trong chẩn đoán y khoa, bầu cử, ước lượng rủi ro trong kinh doanh,… Trong lý thuyết tập mờ, toán tử t-chuẩn và t-đối chuẩn đóng vai trò rất quan trọng, chúng được sử dụng để định nghĩa tổng quát phép toán giao, hợp của các tập mờ, từ đó góp phần xây dựng các luật thành phần trong một hệ thống suy diễn. Vì thế cần nghiên cứu sâu sắc các tính chất của các toán tử này. Trong lý thuyết mờ trực cảm cũng vậy, báo cáo này đề cập tới các các t-chuẩn, t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được, tức là được hình thành từ các t-chuẩn và t-đối chuẩn mờ. Dựa trên các tính chất Archimedean, lũy linh, chặt của các t-chuẩn, t-đối chuẩn mờ, bài báo này đưa ra một phân lớp quan trọng trên các t-chuẩn, t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được.

*** Liên hệ tác giả**
Roãn Thị Ngân
Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội
Email: *rtngan@hunre.edu.vn*

Định nghĩa 1.1. [3] Xét *X* là một tập không rỗng, một tập mờ trực cảm *A* trên không gian nền *X* cho bởi:

$$A=\left\{\left\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\right\rangle \middle| x\in X\right\},$$

ở đó các hàm $\mu_A : X \to [0,1]$, $\nu_A : X \to [0,1]$ lần lượt là hàm thuộc và hàm không thuộc thỏa mãn điều kiện:

$$0\le \mu_A(x)+\nu_A(x)\le 1,\ \forall x\in X$$

và $\mu_A(x),\nu_A(x)$ lần lượt là độ thuộc và độ không thuộc của *x* vào *A*.

Định nghĩa 1.2. [2] Tập L^* và quan hệ thứ tự $\le_{L^*}$ trên L^* được định nghĩa như sau:

$$L^*=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1,x_2\in[0,1],x_1+x_2\le 1\}$$

$$(x_1,x_2)\le_{L^*}(y_1,y_2)\Leftrightarrow x_1\le y_1, x_2\ge y_2,$$

$$(x_1,x_2)=_{L^*}(y_1,y_2)\Leftrightarrow x_1= y_1, x_2= y_2,$$

$$(x_1,x_2)<_{L^*}(y_1,y_2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1<y_1,x_2\ge y_2\\ x_1=y_1,x_2>y_2\end{array}\right.$$

$$\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2)\in L^*.$$

Mệnh đề 1.3. [2] Tập $\left(L^*, \leq_{L^*}\right)$ là một dàn đầy đủ với các phần tử trung hòa $0_{L^*} = (0,1), 1_{L^*} = (1,0)$.

Chú ý: Từ giờ trở đi, nếu $x \in L^*$ thì ta kí hiệu $x = (x_1, x_2) \in L^*$ và pr_1x, pr_2x lần lượt là ánh xạ chiếu lên thành phần thứ nhất và thành phần thứ hai của x. Ta có $pr_1x = x_1, pr_2x = x_2$.

Định nghĩa 1.4. [2] Phủ định mờ trực cảm là một ánh xạ $N \;: L^* - L^*$ không tăng và

$N\left(0_{L^*}\right) = 1_{L^*}, N\left(1_{L^*}\right) = 0_{L^*}$.

Phủ định N là cuộn nếu và chỉ nếu $N\left(N(x)\right) = x, \forall x \in L^*$.

Ví dụ 1.5. Phủ định chuẩn N_s được cho bởi: $N_s(x) = N_s(x_1, x_2) = (x_2, x_1), \forall x \in L^*$.

Định nghĩa 1.6. [2] Một t-chuẩn mờ trực cảm là một ánh xạ $\mathrm{T}::(L^*)^2 - L^*$ thỏa mãn, với mọi $x, y, z \in L^*$:

* $\mathrm{T}(x, 1_{L^*}) = x$ (điều kiện biên);
* $\mathrm{T}(x, y) = \mathrm{T}(y, x)$ (điều kiện giao hoán);
* $\mathrm{T}(x, \mathrm{T}(y, z)) = \mathrm{T}(\mathrm{T}(x, y), z)$ (điều kiện kết hợp);
* $\mathrm{T}(x, y) \leq_{L^*} \mathrm{T}(x', y'),\ \forall x \leq_{L^*} x', y \leq_{L^*} y'$.
(điều kiện tăng).

Định nghĩa 1.7. [2] Một t-đối chuẩn mờ trực cảm là một ánh xạ $\mathrm{S}::(L^*)^2 - L^*$ thỏa mãn,

với mọi $x, y, z \in L^*$:

* $\mathrm{S}(x, 0_{L^*}) = x$ (điều kiện biên);
* $\mathrm{S}(x, y) = \mathrm{S}(y, x)$ (điều kiện giao hoán);
* $\mathrm{S}(x, \mathrm{S}(y, z)) = \mathrm{S}(\mathrm{S}(x, y), z)$ (điều kiện kết hợp);
* $\mathrm{S}(x, y) \leq_{L^*} \mathrm{S}(x', y'),\ \forall x \leq_{L^*} x', y \leq_{L^*} y'$
(điều kiện tăng).

Định nghĩa 1.8. [2] Một t-chuẩn mờ trực cảm T được gọi là đối ngẫu với t-đối chuẩn S và ngược lại, nếu tồn tại một phủ định mờ trực cảm N sao cho một trong hai điều sau được thỏa mãn, với mọi $x, y \in L^*$:

$$\mathrm{T}(x, y) = N\left(\mathrm{S}\left(N(x), N(y)\right)\right),$$

$$\mathrm{S}(x, y) = N\left(\mathrm{T}\left(N(x), N(y)\right)\right).$$

Định nghĩa 1.9. [6] Một t-chuẩn mờ trực cảm T được gọi là t-biểu diễn được nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn *T* và một t-đối chuẩn *S* trên [0,1] thỏa mãn, với mọi $x, y \in L^*$:

$$\mathrm{T}(x, y) = (T(x_1, y_1), S(x_2, y_2)).$$

Một t-đối chuẩn mờ trực cảm S được gọi là t-biểu diễn được nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn *T* và một t-đối chuẩn *S* trên [0,1] thỏa mãn, với mọi $x, y \in L^*$:

$$\mathrm{S}(x, y) = (S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)).$$

Định nghĩa 1.10. [6] T-đối chuẩn mờ trực cảm đối ngẫu qua một phủ định mờ trực cảm cuộn N trên L^* của một t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được là t-biểu diễn được.

T-chuẩn mờ trực cảm đối ngẫu qua một phủ định mờ trực cảm cuộn N trên L^* của một t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được là t-biểu diễn được.

Định nghĩa 1.11. Một t-chuẩn mờ trực cảm T được gọi là Archimedean nếu và chỉ nếu với mọi $x \in L^* \setminus \{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$: $\mathrm{T}(x, x) <_{L^*} x$.

Định nghĩa 1.12 Một t-đối chuẩn mờ trực cảm S:được gọi là Archimedean nếu và chỉ

nếu với mọi $x \in L^* \setminus \{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$: $\mathrm{S}:(x, x) >_{L^*} x$.

Định nghĩa 1.13. Một t-chuẩn mờ trực cảm T được gọi là:

* lũy linh nếu và chỉ nếu:
$\exists x, y \in L^* \setminus \{0_{L^*}\}, \mathrm{T}(x, y) = 0_{L^*}$.
* chặt nếu và chỉ nếu:
$\forall x, y \in L^* \setminus \{0_{L^*}\}, \mathrm{T}(x, y) \neq 0_{L^*}$.

Định nghĩa 1.14. Một t-đối chuẩn mờ trực cảm S: được gọi là:

* lũy linh nếu và chỉ nếu:
$\exists x, y \in L^* \setminus \{1_{L^*}\}, \mathrm{S}:(x, y) = 1_{L^*}$.
* chặt nếu và chỉ nếu:
$\forall x, y \in L^* \setminus \{1_{L^*}\}, \mathrm{S}:(x, y) \neq 1_{L^*}$.

Tôi đưa ra hai định lý như sau:

Định lý 1.15. Cho T là một t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được, với mọi $x, y \in L^*$:

$$\mathrm{T}(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)),$$

Nếu *T* và *S* là Archimdean thì T là Archimedean.

Chứng minh: Với mọi $x \in L^* \setminus \{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$:

$$\mathrm{T}(x,x) = (T(x_1,x_1), S(x_2,x_2)).$$

Do toán tử *T* và *S* là Archimdean nên $T(x_1,x_1) < x_1, S(x_2,x_2) > x_2$, kéo theo $\mathrm{T}(x,x) <_{L^*} x.$

Định lý 1.16. Cho S là một t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được, với mọi $x, y \in L^*$:

$$\mathrm{S}(x,y) = (S(x_1,y_1), T(x_2,y_2)).$$

Nếu *T* và *S* là Archimdean thì S là Archimedean.

Chứng minh: Tương tự phần chứng minh của Định lý 1.15, ta có Định lý 1.16 được chứng minh.

Sau đây, tôi đưa ra một phân lớp các toán tử, các ví dụ với các họ toán tử quan trọng. Sau đó tôi trình bày các mệnh đề liên quan.

2. Một số lớp t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được

***a*. Lớp t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được chặt-chặt, kí hiệu Δ_{SS}**

Định nghĩa 2.1. Một t-chuẩn mờ trực cảm T được gọi là chặt-chặt, t-biểu diễn được nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn chặt *T* và một t-đối chuẩn chặt *S* trên [0,1] sao cho, với mọi $x, y \in L^*$:

$$\mathrm{T}(x,y) = (T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)).$$

Ví dụ 2.2. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{SS} :

$$\mathrm{T}(x,y) = (x_1y_1, x_2 + y_2 - x_2y_2)$$

Chứng minh: Toán tử đã cho là một t-chuẩn mờ trực cảm (xem [3]). Toán tử $T(x,y) = xy$ là một t-chuẩn mờ có tính chặt (xem [1]). Toán tử $\mathrm{S}(x,y) = x + y - xy$ là một t-đối chuẩn mờ có tính chặt (xem [1]). Do đó, toán tử đã cho thuộc lớp Δ_{SS}.

Ví dụ 2.3. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{SS} :

$$\forall \lambda > 0,\ \mathrm{T}(x,y) = \left(\frac{x_1y_1}{\lambda + (1-\lambda)(x_1 + y_1 - x_1y_1)}, \frac{x_2 + y_2 + (\lambda - 2)x_2y_2}{1 + (\lambda - 1)x_2y_2} \right)$$

(xem [5]).

Ví dụ 2.4. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{SS} :

$$\forall \lambda_1 \ge \lambda_2 > 0,\ \mathrm{T}(x,y) = \left(\frac{x_1y_1}{\lambda_1 + (1-\lambda_1)(x_1 + y_1 - x_1y_1)}, \frac{x_2 + y_2 + (\lambda_2 - 2)x_2y_2}{1 + (\lambda_2 - 1)x_2y_2} \right)$$

Chứng minh:

Ta chứng minh $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in (0,+\infty); \lambda_1 \ge \lambda_2$:

$$\left[x_2 + y_2 + (\lambda_2 - 2)x_2y_2\right] / \left[1 + (\lambda_2 - 1)x_2y_2\right] \le \left[x_2 + y_2 + (\lambda_1 - 2)x_2y_2\right] / \left[1 + (\lambda_1 - 1)x_2y_2\right]. \quad (2.1)$$

Thật vậy, ta có

$$1 + (\lambda - 1)x_2y_2 \ge 0, \forall \lambda > 0$$
$$\Rightarrow \left[1 + (\lambda_2 - 1)x_2y_2\right]\left[1 + (\lambda_1 - 1)x_2y_2\right] \ge 0$$

Ta lại có, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in (0,+\infty); \lambda_1 \ge \lambda_2$:

$$(2.1) \Leftrightarrow \left[x_2 + y_2 + (\lambda_2 - 2)x_2y_2\right]\left[1 + (\lambda_1 - 1)x_2y_2\right] \le \left[x_2 + y_2 + (\lambda_1 - 2)x_2y_2\right]\left[1 + (\lambda_2 - 1)x_2y_2\right]$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - 1)x_2y_2(x_2 + y_2) + (\lambda_2 - 2)x_2y_2 + (\lambda_2 - 2)(\lambda_1 - 1)x_2^2y_2^2 \le (\lambda_2 - 1)x_2y_2(x_2 + y_2) + (\lambda_1 - 2)x_2y_2 + (\lambda_1 - 2)(\lambda_2 - 1)x_2^2y_2^2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x_2y_2(x_2 + y_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)x_2y_2 + \left[(\lambda_2 - 2)(\lambda_1 - 1) - (\lambda_1 - 2)(\lambda_2 - 1)\right]x_2^2y_2^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x_2y_2(x_2 + y_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)x_2y_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)x_2^2y_2^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)x_2y_2(1 - x_2 - y_2 + x_2y_2) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)x_2y_2(1 - x_2)(1 - y_2) \le 0 \quad \textit{(luôn đúng).}$$

Kết hợp (2.1) với Ví dụ 2.3, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.5. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{SS}:

$\forall 0<\lambda \neq 1$,

$$\mathrm{T}(x,y)=(\log_{\lambda}(1+\frac{(\lambda^{x_1}-1)(\lambda^{y_1}-1)}{\lambda-1}),$$

$$1-\log_{\lambda}(1+\frac{(\lambda^{1-x_2}-1)(\lambda^{1-y_2}-1)}{\lambda-1})),$$

(xem [5]).

Ví dụ 2.6. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{SS}:

$$\mathrm{T}(x,y)=\left(x_1y_1,\left(x_2^2+y_2^2-x_2^2y_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Chứng minh: $\left(x^2+y^2-x^2y^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq x+y-xy$, thật vậy:

$$\left(x^2+y^2-x^2y^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq x+y-xy \Leftrightarrow x^2+y^2-x^2y^2\leq$$
$$x^2+y^2+2xy+x^2y^2-2xy(x+y)$$
$$\Leftrightarrow 0\leq 2xy+2x^2y^2-2xy(x+y)\Leftrightarrow x+y-xy\leq 1$$

(luôn đúng).

Kết hợp điều vừa được chứng minh với Ví dụ 2.2, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.7. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{SS}:

$$\mathrm{T}(x,y)=\left(x_1y_1,\left(x_2^a+y_2^a-x_2^ay_2^a\right)^{\frac{1}{a}}\right), a>1, a\in N.$$

Chứng minh: $\left(x^a+y^a-x^ay^a\right)^{\frac{1}{a}}\leq x+y-xy$ (*) bằng phương pháp qui nạp:

* Với a=2, (*) đúng.

* Giả sử (*) đúng với $a=k, k>2, k\in N$, tức là $x^k+y^k-x^ky^k\leq(x+y-xy)^k$, ta phải chứng minh (*) đúng với a=k+1. Thật vậy, ta có:

$$(x+y-xy)^{k+1}=(x+y-xy)^k(x+y-xy),$$

kết hợp với điều giả sử (*) đúng với a=k, suy ra:

$$(x+y-xy)^{k+1}\geq\left(x^k+y^k-x^ky^k\right)(x+y-xy) \qquad (2.2)$$

Bây giờ ta chứng minh:

$$\left(x^k+y^k-x^ky^k\right)(x+y-xy)$$
$$\geq x^{k+1}+y^{k+1}-x^{k+1}.y^{k+1} \qquad (2.3)$$

Thật vậy, (2.3) tương đương với:

$$x^{k+1}+x^ky-x^{k+1}y+xy^k+y^{k+1}-xy^{k+1}-x^{k+1}y^k$$
$$-x^ky^{k+1}+x^{k+1}y^{k+1}$$
$$\geq x^{k+1}+y^{k+1}-x^{k+1}.y^{k+1}$$
$$\Leftrightarrow x^ky-x^{k+1}y+xy^k-xy^{k+1}-x^{k+1}y^k-x^ky^{k+1}$$
$$+2x^{k+1}y^{k+1}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^{k-1}-x^k+y^{k-1}-y^k-x^ky^{k-1}-x^{k-1}y^k+2x^ky^k\geq 0$$
$$\Leftrightarrow\left(x^{k-1}-x^k\right)+\left(y^{k-1}-y^k\right)+\left(x^ky^k-x^ky^{k-1}\right)$$
$$+\left(x^ky^k-x^{k-1}y^k\right)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^{k-1}(1-x)+y^{k-1}(1-y)+x^ky^{k-1}(y-1)$$
$$+x^{k-1}y^k(x-1)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^{k-1}(1-x)\left(1-y^k\right)+y^{k-1}(1-y)\left(1-x^k\right)\geq 0$$

(luôn đúng).

Do đó, từ (2.2) và (2.3) suy ra

$$x^{k+1}+y^{k+1}-x^{k+1}.y^{k+1}\leq(x+y-xy)^{k+1}$$

hay

$$\left(x^{k+1}+y^{k+1}-x^{k+1}.y^{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\leq x+y-xy, \forall k>2, k\in N.$$

Kết hợp (*) với Ví dụ 2.2, ta có điều phải chứng minh.

b. Lớp t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được lũy linh-lũy linh, Δ_{NN}

Định nghĩa 2.8. Một t-chuẩn mờ trực cảm T được gọi là lũy linh-lũy linh, t-biểu diễn được nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn lũy linh *T* và một t-đối chuẩn lũy linh *S* trên [0,1] sao cho, với mọi $x,y\in L^*$:

$$\mathrm{T}(x,y)=(T(x_1,y_1),S(x_2,y_2)).$$

Ví dụ 2.9. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{NN}:

$$\mathrm{T}(x,y)=\left(0\vee(x_1+y_1-1),1\wedge(x_2+y_2)\right)$$

Chứng minh: Toán tử đã cho là một t-chuẩn mờ trực cảm (xem [3]). Toán tử $T(x,y)=0\vee(x+y-1)$ là một t-chuẩn mờ có tính lũy linh (xem [1]). Toán tử $\mathrm{S}(x,y)=1\wedge(x+y)$ là một t-đối chuẩn mờ có tính lũy linh (xem [1]). Do đó toán tử đã cho thuộc lớp Δ_{NN}.

Ví dụ 2.10. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{NN}:

$$\mathrm{T}(x,y) = (0 \vee \frac{4x_1+4y_1-3x_1y_1-4}{x_1+y_1-x_1y_1},$$

$$1 \wedge \frac{x_2+y_2+2x_2y_2}{1-x_2y_2}).$$

Chứng minh:

- Không khó để kiểm tra $pr_1\mathrm{T}(x,y)$ là một t-chuẩn mờ (thỏa mãn 4 điều kiện của định nghĩa t-chuẩn mờ) và $pr_2\mathrm{T}(x,y)$ là một t-đối chuẩn mờ (thỏa mãn 4 điều kiện của định nghĩa t-đối chuẩn mờ).

- Dễ thấy t-chuẩn $pr_1\mathrm{T}(x,y)$ và t-đối chuẩn $pr_2\mathrm{T}(x,y)$ có tính lũy linh.

- Với mọi $x, y \in L^*$, ta kiểm tra được

$$pr_1\mathrm{T}(x,y) + pr_2\mathrm{T}(x,y) \in [0,1].$$

Do ta có:

$$x_1+y_1-x_1y_1 = 1-(1-x_1)(1-y_1) \le 1-x_2y_2$$

$$\Rightarrow \frac{4x_1+4y_1-3x_1y_1-4}{x_1+y_1-x_1y_1} + \frac{x_2+y_2+2x_2y_2}{1-x_2y_2}$$

$$\le \frac{4x_1+4y_1-3x_1y_1-4+x_2+y_2+2x_2y_2}{x_1+y_1-x_1y_1}$$

$$\le \frac{4x_1+4y_1-3x_1y_1-2-x_1-y_1+2(1-x_1)(1-y_1)}{x_1+y_1-x_1y_1}$$

$$= \frac{3x_1+3y_1-3x_1y_1-2+2(1-x_1)(1-y_1)}{x_1+y_1-x_1y_1} = 1$$

Vậy $\mathrm{T} \in \Delta_{NN}$.

Ví dụ 2.11. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{NN}:

$$\forall \lambda_1 \ge \lambda_2 > -1,\ \mathrm{T}(x,y) =$$

$$\left(0 \vee \left((x_1+y_1-1)(1+\lambda_1) - \lambda_1 x_1 y_1\right), 1 \wedge \left(x_2+y_2+\lambda_2 x_2 y_2\right)\right)$$

(xem [5]).

Ví dụ 2.12. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{NN}:

$$\forall a > 0,\ \mathrm{T}(x,y) =$$

$$\left(0 \vee 1 - \left((1-x_1)^a + (1-y_1)^a\right)^{\frac{1}{a}}, 1 \wedge \left(x_2^a + y_2^a\right)^{\frac{1}{a}}\right),$$

(xem [5]).

Ví dụ 2.13. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{NN}:

$$\forall a > 0,\ \mathrm{T}(x,y) =$$

$$\left(\left(0 \vee \left(x_1^a + y_1^a - 1\right)\right)^{\frac{1}{a}}, 1 \wedge \left(x_2^a + y_2^a\right)^{\frac{1}{a}}\right)$$

Chứng minh: Ta chứng minh $pr_1\mathrm{T} + pr_2\mathrm{T} \le 1$, thật vậy:

- Nếu $x_1^a + y_1^a \le 1$ và $x_2^a + y_2^a \ge 1$ ta có: $pr_1\mathrm{T}(x,y) + pr_2\mathrm{T}(x,y) = 1.$

- Nếu $x_1^a + y_1^a \le 1$ và $x_2^a + y_2^a < 1$ ta có: $pr_1\mathrm{T}(x,y) + pr_2\mathrm{T}(x,y) = \left(x_2^a + y_2^a\right)^{\frac{1}{a}} \le 1.$

- Nếu $x_1^a + y_1^a > 1$ và $x_2^a + y_2^a \ge 1$ ta có $x_1^a + y_1^a + x_2^a + y_2^a > 2$, vô lý vì :

$$x_1^a + y_1^a + x_2^a + y_2^a \le (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 2$$

Không xảy ra trường hợp này.

- Nếu $x_1^a + y_1^a > 1$ và $x_2^a + y_2^a < 1$ ta có

$$pr_1\mathrm{T}(x,y) + pr_2\mathrm{T}(x,y) = \left(x_1^a + y_1^a - 1\right)^{\frac{1}{a}} + \left(x_2^a + y_2^a\right)^{\frac{1}{a}}.$$

- Ta chứng minh:

$$\left(x^a + y^a - 1\right)^{\frac{1}{a}} \le x + y - 1,$$

tức là $x^a + y^a - 1 \le (x+y-1)^a \quad (2.4)$.

Với a=1, (2.4) hiển nhiên đúng. Giả sử (2.4) đúng với $a = k > 1, k \in N$, nghĩa là $x^k + y^k - 1 \le (x+y-1)^k$. Ta phải chứng minh (2.4) đúng với a=k+1. Thật vậy,

$$(x+y-1)^{k+1} = (x+y-1)^k (x+y-1) \ge \left(x^k + y^k - 1\right)(x+y-1)$$

Ta lại có:

$$\left(x^k + y^k - 1\right)(x+y-1) - \left(x^{k+1} + y^{k+1} - 1\right)$$

$$= \left(x^{k+1} + x^k y - x^k + xy^k + y^{k+1} - y^k - x - y + 1\right)$$

$$- \left(x^{k+1} + y^{k+1} - 1\right)$$

$$= x^k y - x^k + xy^k - y^k - x - y + 2$$

$$= x^k (y-1) + y^k (x-1) + (1-x) + (1-y)$$

$$= (1-y)\left(1-x^k\right) + (1-x)\left(1-y^k\right) \ge 0$$

Do đó $(x+y-1)^{k+1} \geq x^{k+1}+y^{k+1}-1$ hay (2.4) được chứng minh.

- Ta chứng minh: $\left(x^a+y^a\right)^{\frac{1}{a}} \leq x+y$, tức là $x^a+y^a \leq (x+y)^a$ (2.5). Ta có

$$(2.5) \Leftrightarrow x^a+y^a \leq x^a+y^a+\sum_{k=1}^{a-1} C_a^k x^{a-k} y^k$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{a-1} C_a^k x^{a-k} y^k$$

(luôn đúng).

Do vậy, từ (2.4) và (2.5) suy ra:

$$pr_1\mathrm{T}(x,y)+pr_2\mathrm{T}(x,y) \leq x_1+y_1-1+x_2+y_2 \leq (x_1+x_2)+(y_1+y_2)-1 \leq 1.$$

Hơn nữa, $pr_1\mathrm{T}$ và $pr_2\mathrm{T}$ là các toán tử lôgic mờ có tính lũy linh (xem [5]).

Do đó $\mathrm{T} \in \Delta_{NN}$.

c. Lớp t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được lũy linh-chặt, kí hiệu Δ_{NS}

Định nghĩa 2.14. Một t-chuẩn mờ trực cảm T được gọi là lũy linh-chặt, t-biểu diễn được nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn lũy linh *T* và một t-đối chuẩn chặt *S* trên [0,1] sao cho, với mọi $x, y \in L^*$:

$$\mathrm{T}(x,y)=(T(x_1,y_1), S(x_2,y_2)).$$

Ví dụ 2.15. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{NS}:

$$\mathrm{T}(x,y)=\left(0 \vee (x_1+y_1-1), x_2+y_2-x_2y_2\right)$$

Chứng minh: Toán tử đã cho là một t-chuẩn mờ trực cảm (xem [3]). Toán tử $T(x,y)=0 \vee (x+y-1)$ là một t-chuẩn mờ có tính lũy linh (xem [1]). Toán tử $\mathrm{S}(x,y)=x+y-xy$ là một t-đối chuẩn mờ có tính chặt (xem [1]). Do đó toán tử đã cho thuộc lớp Δ_{NS}.

Ví dụ 2.16. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{NS}:

$$\forall a>0,\ \mathrm{T}(x,y)=$$

$$\left(0 \vee \left\{\frac{1}{a}\left(x_1+y_1-1+(a-1)x_1y_1\right)\right\}, x_2+y_2-x_2y_2\right).$$

Chứng minh: Ta có với mọi $x, y \in [0,1]$,

$$T(x,y)=\max\left\{\frac{1}{a}\left(x+y-1+(a-1)xy\right), 0\right\}$$

Là họ những t-chuẩn lũy linh Jane Doe [1] và:

$$\frac{1}{a}\left(x_1+y_1-1+(a-1)x_1y_1\right)+x_2+y_2-x_2y_2$$

$$=\frac{1}{a}\left(x_1+y_1-1+(a-1)x_1y_1\right)+1-(1-x_2)(1-y_2)$$

$$\leq \left(1-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a}(x_1+y_1)+\frac{a-1}{a}x_1y_1-x_1y_1$$

$$=\left(1-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a}\left(x_1+y_1-x_1y_1\right) \leq \left(1-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a}=1.$$

Vậy $\mathrm{T}(x,y)$ là t-chuẩn mờ trực cảm lũy linh-chặt, t-biểu diễn được.

Ví dụ 2.17. Toán tử T sau đây là toán tử thuộc lớp Δ_{NS}:

$$\forall a \in (0,1),\ \mathrm{T}(x,y)=$$

$$\left(\left(-a+a(x_1+y_1)+(1-a)x_1y_1\right) \vee 0, x_2+y_2-x_2y_2\right).$$

Chứng minh:

Xét $T_f=f^{-1}\left(f(x)f(y) \vee a\right)$ với:

$$f(x)=a+(1-a)x,\ f^{-1}(x)=\frac{x-a}{1-a},\ a \in (0,1).$$

Ta có: T_f là một t-chuẩn lũy linh,

$$T_f=f^{-1}\left((a+(1-a)x)(a+(1-a)y) \vee a\right) f^{-1}\left(f(x)f(y) \vee a\right)$$

$$=\frac{\left[\left(a^2+(a-a^2)(x+y)+(1-a)^2xy\right) \vee a\right]-a}{1-a}$$

$$=\frac{\left(a^2-a+(a-a^2)(x+y)+(1-a)^2xy\right) \vee 0}{1-a}$$

$$=\left(-a+a(x+y)+(1-a)xy\right) \vee 0$$

Xét $\forall 1>a>0,\ \mathrm{T}(x,y)=$

$$\left(\left(-a+a(x_1+y_1)+(1-a)x_1y_1\right) \vee 0, x_2+y_2-x_2y_2\right).$$

Ta có:

$$-a+a(x_1+y_1)+(1-a)x_1y_1+x_2+y_2-x_2y_2$$

$$=-a+a(x_1+y_1)+(1-a)x_1y_1+1-(1-x_2)(1-y_2)$$

$$\leq -a+a(x_1+y_1)+(1-a)x_1y_1+1-x_1y_1$$

$$=-a+1+a\left(x_1+y_1-x_1y_1\right)$$

$$=-a+1+a\left(1-(1-x_1)(1-y_1)\right)=1-a(1-x_1)(1-y_1) \leq 1$$

Vậy $\mathrm{T}(x,y)$ là một t-chuẩn mờ trực cảm và là một lũy linh-chặt t-biểu diễn được.

Mệnh đề 2.18. Không tồn tại t-chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được T sao cho với mọi $x, y \in L^*$: $\mathrm{T}(x,y) = (T(x_1, y_1), S(x_2, y_2))$ với *T* là t-chuẩn chặt và *S* là t-đối chuẩn lũy linh.

Chứng minh: Giả sử với mọi $x, y \in L^*$:

$$\mathrm{T}(x,y) = (T(x_1, y_1), S(x_2, y_2))$$

với *T* là t-chuẩn chặt và

$$\exists x_2', y_2' \in (0,1) \mid \mathrm{S}(x_2', y_2') = 1.$$

Chọn $x_1 \neq 0 \mid x_1 + x_2' \leq 1,\ y_1 \neq 0 \mid y_1 + y_2' \leq 1,$ thì $T(x_1, y_1) > 0,$ do *T* chặt.

Với $\overline{x} = (x_1, x_2'), \overline{y} = (y_1, y_2')$ xét $\mathrm{T}(\overline{x}, \overline{y})$: $T(x_1, y_1) + \mathrm{S}(x_2', y_2') > 1,$ mâu thuẫn.

Mệnh đề 2.19. Nếu T thuộc vào lớp Δ_{SS} hoặc Δ_{NS}, khi đó T là một t-chuẩn mờ trực cảm chặt.

Chứng minh: Giả sử $\mathrm{T} \in \Delta_{NS}$ và với mọi $x, y \in L^*: \mathrm{T}(x,y) = (T(x_1, y_1), S(x_2, y_2))$

sao cho $\exists x', y' \in L^* \setminus \{0_{L^*}\} \mid \mathrm{T}(x', y') = 0_{L^*}$.

Ta có $T(x_1', y_1') = 0,\ S(x_2', y_2') = 1,$ do *S* chặt nên $x_2' = 1$ hoặc $y_2' = 1,$ mâu thuẫn.

Vậy T là một t-chuẩn mờ trực cảm chặt.

Tương tự, $\mathrm{T} \in \Delta_{SS}$ là t-chuẩn mờ trực cảm chặt.

Mệnh đề 2.20. Nếu T thuộc vào lớp Δ_{NN}, khi đó T là một t-chuẩn mờ trực cảm lũy linh.

Chứng minh: Giả sử $\mathrm{T} \in \Delta_{NN}$,

$$\forall x, y \in L^*: \mathrm{T}(x,y) = (T(x_1, y_1), S(x_2, y_2)).$$

Do *T* lũy linh nên: $\exists u, v \neq 0 \mid T(u,v) = 0$

Do *T* không giảm nên: $\forall u' \leq u, v' \leq v, T(u', v') = 0.$

Do *S* là lũy linh nên $\exists a, b \neq 1 \mid S(a,b) = 1$.

Ta chọn:

$$x = (u', a) \big| u' + a \leq 1, y = (v', b) \big| v' + b \leq 1$$

Khi đó:

$$\mathrm{T}(x,y) = (T(u', v'), S(a,b)) = (0,1) = 0_{L^*},$$

Vậy T là lũy linh.

3. Một số lớp t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được

a. Lớp t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được chặt-chặt, kí hiệu ∇_{SS}

Định nghĩa 3.1. Một t-đối chuẩn mờ trực cảm S được gọi là chặt-chặt, t-biểu diễn được nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn chặt *T* và một t-đối chuẩn chặt *S* trên [0,1] sao cho, với mọi $x, y \in L^*$:

$$\mathrm{S}(x,y) = (S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)).$$

Ví dụ 3.2. Một số toán tử thuộc lớp ∇_{SS}:

$$* \ \mathrm{S}(x,y) = (x_1 + y_1 - x_1 y_1, x_2 y_2).$$

$$* \ \forall \lambda_2 \geq \lambda_1 > 0,\ \mathrm{S}^*(x,y) = \left(\frac{x_1 + y_1 + (\lambda_1 - 2) x_1 y_1}{1 + (\lambda_1 - 1) x_1 y_1}, \frac{x_2 y_2}{\lambda_2 + (1 - \lambda_2)(x_2 + y_2 - x_2 y_2)} \right).$$

$* \ \forall 0 < \lambda \neq 1,$

$$\mathrm{S}(x,y) = (1 - \log_\lambda (1 + \frac{(\lambda^{1-x_1} - 1)(\lambda^{1-y_1} - 1)}{\lambda - 1}), \log_\lambda (1 + \frac{(\lambda^{x_2} - 1)(\lambda^{y_2} - 1)}{\lambda - 1})).$$

$* \ \forall a > 1,$

$$\mathrm{S}(x,y) = ((x_1^a + y_1^a - x_1^a y_1^a)^{\frac{1}{a}}, x_2 y_2).$$

Chứng minh: Các toán tử S ở Ví dụ 3.2 được suy ra từ các Ví dụ 2.2 -2.7. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

b. Lớp t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được lũy linh-lũy linh ∇_{NN}

Định nghĩa 3.3. Một t-đối chuẩn mờ trực cảm S được gọi là lũy linh-lũy linh, t-biểu diễn được nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn lũy linh *T* và một t-đối chuẩn lũy linh *S* trên [0,1] sao cho, với mọi $x, y \in L^*$:

$$\mathrm{S}(x,y) = (S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)).$$

Ví dụ 3.4. Một số $\mathrm{S} \in \nabla_{NN}$:

* $\mathcal{S}(x,y)=\left(1\wedge\left(x_1+y_1\right),0\vee\left(x_2+y_2-1\right)\right)$.

* $\forall\lambda_2\ge\lambda_1>-1$,

$$\mathcal{S}(x,y)=(1\wedge(x_1+y_1+\lambda_1x_1y_1),\\ 0\vee((x_2+y_2-1)(1+\lambda_2)-\lambda_2x_2y_2)).$$

* $\forall a>0,\ \mathcal{S}(x,y)=$

$$\left(1\wedge\left(x_1^a+y_1^a\right)^{\frac{1}{a}},0\vee1-\left(\left(1-x_2\right)^a+\left(1-y_2\right)^a\right)^{\frac{1}{a}}\right)$$

* $\forall a>0,\ \mathcal{S}(x,y)=$

$$\left(1\wedge\left(x_1^a+y_1^a\right)^{\frac{1}{a}},\left(0\vee\left(x_2^a+y_2^a-1\right)\right)^{\frac{1}{a}}\right)$$

* $\mathcal{S}(x,y)=(1\wedge\dfrac{x_1+y_1+2x_1y_1}{1-x_1y_1},$

$$0\vee\frac{4x_2+4y_2-3x_2y_2-4}{x_2+y_2-x_2y_2}).$$

Chứng minh: Các toán tử $\mathcal{S}$ ở Ví dụ 3.2 được suy ra từ các Ví dụ 2.9 -2.13. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

c. *Lớp t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được chặt-lũy linh,* ∇_{SN}

Định nghĩa 3.5. Một t-đối chuẩn mờ trực cảm $\mathcal{S}$ được gọi là chặt-lũy linh, t-biểu diễn được nếu và chỉ nếu tồn tại một t-chuẩn lũy linh *T* và một t-đối chuẩn chặt *S* trên [0,1] sao cho, với mọi $x,y\in L^*$:

$$\mathcal{S}(x,y)=(S(x_1,y_1),T(x_2,y_2)).$$

Ví dụ 3.6. Một số $\mathcal{S}\in\nabla_{SN}$:

* $\mathcal{S}(x,y)=\left(x_1+y_1-x_1y_1,0\vee\left(x_2+y_2-1\right)\right)$,

* $\forall a>0,\ \mathcal{S}(x,y)=$

$$\left(x_1+y_1-x_1y_1,\left(0\vee\left\{\frac{1}{a}\left(x_2+y_2-1+\left(a-1\right)x_2y_2\right)\right\}\right)\right).$$ *

$\forall 1>a>0,\ \mathcal{S}(x,y)=$

$$\left(x_1+y_1-x_1y_1,\left(-a+a\left(x_2+y_2\right)+\left(1-a\right)x_2y_2\right)\vee0\right).$$

Chứng minh: Các toán tử $\mathcal{S}$ ở Ví dụ 3.2 được suy ra từ các Ví dụ 2.14 -2.17. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Tương tự, như phần trên, những mệnh đề sau được chứng minh.

Mệnh đề 3.7. Không tồn tại t-đối chuẩn mờ trực cảm t-biểu diễn được $\mathcal{S}$ sao cho $\mathcal{S}(x,y)=(S(x_1,y_1),T(x_2,y_2)),\forall x,y\in L^*$ với *T* là t-chuẩn chặt và *S* là t-đối chuẩn lũy linh.

Mệnh đề 3.8. Nếu $\mathcal{S}$ thuộc vào lớp ∇_{SS} hoặc ∇_{SN}, thì $\mathcal{S}$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm chặt.

Mệnh đề 3.9. Nếu $\mathcal{S}$ thuộc vào lớp ∇_{NN}, thì $\mathcal{S}$ là một t-đối chuẩn mờ trực cảm lũy linh.

Định lý 3.10. Giả sử toán tử $\mathcal{T}$ thuộc Δ_{SS} (Δ_{NN},Δ_{NS}) và $\mathcal{S}$ là đối ngẫu với $\mathcal{T}$ qua phủ định mờ trực cảm $\mathcal{N}$ cuộn, giảm chặt, thì $\mathcal{S}$ thuộc ∇_{SS} (∇_{NN},∇_{SN}).

Đặc biệt nếu $\mathcal{N}=N_s$ và $\mathcal{T}=(T,S)$ thì $\mathcal{S}=(S,T)$.

Chứng minh: Giả sử $\mathcal{T}\in\Delta_{NN}$, với mọi $x,y\in L^*:\mathcal{T}(x,y)=(T(x_1,y_1),S(x_2,y_2))$, và $\mathcal{N}(x)=\left(N\left(1-x_2\right),1-N\left(x_1\right)\right)$.

Từ định nghĩa 1.8, ta thu được toán tử đối ngẫu với $\mathcal{T}$ qua $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{S}(x,y)=(N(1-S(1-N(x_1),1-N(y_1))),\\ 1-N(T(N(1-x_2),N(1-y_2)))).$$

Do S lũy linh, nên tồn tại $a,b\in(0,1)$ sao cho $S(a,b)=1$, kéo theo:

$$\exists x_1,y_1\in(0,1)\,|\,a=1-N(x_1),b=1-N(y_1),\\ S(1-N(x_1),1-N(y_1))=1$$

nên $N(1-S(1-N(x_1),1-N(y_1)))=N(0)=1$

và $pr_1\,\mathcal{S}(x,y)$ là một t-đối chuẩn lũy linh.

Do T lũy linh, nên tồn tại $c,d\in(0,1)$ sao cho $T(c,d)=0,$ kéo theo: $\exists x_2,y_2\in(0,1)$ sao cho $c=1-N(x_2),d=1-N(y_2)$ và

$$1-N(T(N(1-x_2),N(1-y_2)))=0$$

Do đó $\mathrm{pr}_2 \mathrm{S}(x,y)$ là một t-chuẩn lũy linh. Vậy $\mathrm{S}(x,y) \in \nabla_{NN}$.

Tương tự, điều ngược lại được chứng minh.

Giả sử $\mathrm{T} \in \Delta_{SS}$, do S là chặt, nên $\forall a,b \in (0,1) \mid S(a,b) < 1$, kéo theo:

$\forall x_1, y_1 \in (0,1), S(1-N(x_1), 1-N(y_1)) < 1$.

Do N giảm chặt nên với mọi $x_1, y_1 \in (0,1)$ thì

$N(1-S(1-N(x_1),1-N(y_1))) < 1$.

Do đó $\mathrm{pr}_1 \mathrm{S}(x,y)$ là một t-đối chuẩn chặt.

Tương tự, $\mathrm{pr}_2 \mathrm{S}(x,y)$ là một t-chuẩn chặt. Vậy $\mathrm{S}(x,y) \in \nabla_{SS}$.

Định lý 3.11. Giả sử toán tử $\mathrm{S} = (S_1, T_1)$ thuộc ∇_{SS} (tương ứng ∇_{NN}, ∇_{SN}) và T là đối ngẫu với S qua phủ định mờ trực cảm N cuộn, giảm chặt, thì $\mathrm{T} = (T_2, S_2)$ thuộc Δ_{SS} (tương ứng Δ_{NN}, Δ_{NS}).

Đặc biệt nếu $N = N_s$ và $\mathrm{S} = (S_1, T_1)$ thì $\mathrm{T} = (T_1, S_1)$.

Ví dụ 3.12. Với mọi $x, y \in L^*$:

$\mathrm{T}(x,y) = (x_1 y_1, x_2 + y_2 - x_2 y_2) \in \Delta_{SS}$,

$N(x) = \left(N(1-x_2), 1-N(x_1)\right)$

với $N(a) = \dfrac{1-a}{1+a}, \forall a \in [0,1]$.

Khi đó ta có:

$$\mathrm{S}(x,y) = \left(\frac{x_1 + y_1}{1 + x_1 y_1}, \frac{x_2 y_2}{2 - x_2 - y_2 + x_2 y_2}\right).$$

Ta thấy $\mathrm{S}(x,y)$ là một toán tử cụ thể thuộc họ toán tử $\mathrm{S}^*(x,y)$ ở Ví dụ 3.2 với $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$. Do đó $\mathrm{S}(x,y) \in \nabla_{SS}$.

Ví dụ 3.13. Với mọi $x, y \in L^*$:

$\mathrm{T}(x,y) = (0 \vee (x_1 + y_1 - 1), 1 \wedge (x_2 + y_2)) \in \Delta_{NN}$,

$N(x) = \left(N(1-x_2), 1-N(x_1)\right)$

với $N(a) = \dfrac{1-a}{1+a}, \forall a \in [0,1]$.

Khi đó ta có:

$$\mathrm{S}(x,y) = (1 \wedge \frac{x_1 + y_1 + 2x_1 y_1}{1 - x_1 y_1}, \quad 0 \vee \frac{4x_2 + 4y_2 - 3x_2 y_2 - 4}{x_2 + y_2 - x_2 y_2}) \in \nabla_{NN}.$$

(xem Ví dụ 3.4)

Ví dụ 3.14. Với mọi $x, y \in L^*$:

$\mathrm{T}(x,y) = (0 \vee (x_1 + y_1 - 1), x_2 + y_2 - x_2 y_2) \in \Delta_{NS}$,

$N(x) = \left(N(1-x_2), 1-N(x_1)\right)$

với $N(a) = \dfrac{1-a}{1+a}, \forall a \in [0,1]$.

Khi đó ta có: $\mathrm{S}(x,y) =$

$$\left(\frac{x_1 + y_1}{1 + x_1 y_1}, 0 \vee \frac{4x_2 + 4y_2 - 3x_2 y_2 - 4}{x_2 + y_2 - x_2 y_2}\right) \in \nabla_{SN}.$$

(Do kết quả của Ví dụ 3.12, 3.13 và do $\dfrac{x_1 + y_1}{1 + x_1 y_1} \le \dfrac{x_1 + y_1 + 2x_1 y_1}{1 - x_1 y_1}$).

4. Kết luận

Trong bài báo này, tôi đã trình bày khá hoàn chỉnh một phân lớp theo một số lớp con của các t-chuẩn và t-đối chuẩn t-biểu diễn được trực cảm phát triển, mở rộng một số kết quả đã có trong [6,7] cho các tập mờ trực cảm, chuẩn bị cho các nghiên cứu tiếp cho các tập mờ bức tranh – một khái niệm mới được đề xuất bởi Bùi Công Cường năm 2013, là một mở rộng, tổng quát hóa của khái niệm tập mờ và tập mờ trực cảm.

Tài liệu tham khảo

[1] Hung T. Nguyen, Elbert A. Walker (2005), First Course in Fuzzy Logic - second edition, Department of Mathematical Sciences New Mexico State University Las Cruces, New

Mexico. Chapman and hall/crc, Boca Raton London NewYork Washington, D.C..

[2] Erich Peter Klement and Radco Mesiar (2005), Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms, 1st Edition, Elsevier.

[3] K.T. Atanassov (1983), Intiuitonistic fuzzy sets, VII ITKR's Section, Sofia.

[4] K.T. Atanassov (1999), Intiuitonistic fuzzy sets, Phisica-Verlag, NewYork.

[5] Adrian I Ban (2006), Intiuitonistic Fuzzy Measures, Theory and Applications, Nova science publishers, Inc. NewYork.

[6] Desch Glad Deschrijver, Chris Cornelis, Etienne E.Kerre (February 2004), On the Representation of Intuitionistic Fuzzy t-Norms and t-Conorms, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 12, No.1.

[7] B.C. Cuong, N.Q. Thang, R.T. Ngan and N.D. Hai (2014), A remark on some classes of t-representable intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms, Seminar "Neuro-Fuzzy Systems with Applications" Preprint 03/2014, Institute of Mathematics, June 2014, Hanoi.

[8] Deschrijver G. et al. [2003], Fuzzy Sets and Systems, v.133, 227-235.

A CLASSIFICATION INTO SUBCLASSES OF INTUITIONISTIC T-NORMS AND T-CONORMS FOR INTUITIONISTIC FUZZY SETS

Abstract: A classification into subclasses of t-norm operators and t-conorm operators is an important result of fuzzy logics. T-representable intuitionistic t-norms and t-representable intuitionistic t-conorms were defined and examined by Deschrijver G. et al. in [8]. In this paper, I introduce for the first time a classification into subclasses of t-representable t-norm operators and t-representable t-conorm operators for intuitionistic fuzzy sets. Some properties of these subclasses are also presented.

Key words: intuitionistic fuzzy sets; intuitionistic fuzzy logic operators; intuitionistic fuzzy t-norm; intuitionistic fuzzy t-conorms; t-representable intuitionistic t-norms; t-representable intuitionistic t-conorms.