UED Journal of Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

Nhận bài:
17 – 09 – 2015
Chấp nhận đăng:
30 – 11 – 2015
http://jshe.ued.udn.vn/

ỨNG DỤNG PHẦN MỀM MATHEMATICA CHO PHƯƠNG PHÁP NEWTON TÌM NGHIỆM GẦN ĐÚNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Lê Hải Trung

Tóm tắt: Bài báo trình bày về việc áp dụng phần mềm Mathematica để tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x)=0$ bằng phương pháp Newton (còn có tên gọi khác là phương pháp tiếp tuyến) đối với các bài toán cụ thể mà không thể giải được bằng các phép biến đổi đại số. Việc thực hiện giải toán tìm nghiệm gần đúng của phương trình trong phần mềm mathematica sẽ thông qua các bước: nhập phương trình cần tìm nghiệm, sai số; vẽ đồ thị để xác định khoảng phân li nghiệm theo yêu cầu của bài toán bằng các câu lệnh chuyên dụng (trong một số trường hợp cụ thể, ta có thể chi tiết hơn quá trình phân li nghiệm); phần lập trình trong Mathematica để cho máy tính tính toán nhằm thu được nghiệm gần đúng của phương trình với sai số cho trước; cuối cùng là kiểm tra kết quả thu được.

Từ khóa: phương pháp Newton; xấp xỉ; phân li nghiệm; tìm nghiệm gần đúng; phần mềm Mathematica.

1. Đặt vấn đề

Một điều dễ nhận thấy là số các phương trình $f(x)=0$[1] có công thức tường minh trong việc biểu diễn nghiệm chiếm vị trí rất khiêm tốn trong toán học. Rất nhiều bài toán, khi chưa có công cụ máy tính hỗ trợ, mới chỉ dừng ở việc chứng minh sự tồn tại và hội tụ của nghiệm về một giá trị bằng sự lập luận lý thuyết thuần túy (một dãy đơn điệu tăng hoặc giảm). Khi sử dụng máy tính và các phần mềm hỗ trợ tính toán, việc tìm nghiệm gần đúng của phương trình được thực hiện dễ dàng và tiện lợi hơn. Nội dung của bài báo không đi sâu vào việc khảo cứu các vấn đề lý thuyết, mà chỉ tập trung ứng dụng phần mềm Mathematica để tìm nghiệm gần đúng của phương trình.

Xét phương trình:

$$f(x)=0. \qquad (1)$$

Ta cần đi tìm nghiệm của phương trình (1) với một sai số δ cho trước nào đấy trên khoảng phân li nghiệm (a, b).

Nghiệm gần đúng $x=x_k \pm \delta$ của (1), trong đó giá trị x_k được xác định bởi công thức Newton sau:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \qquad (2)$$

Trong quá trình tính toán, máy tính sẽ thực hiện vòng lặp cho đến khi nhận được giá trị $f(x_k).f(x_k+s.\Delta)<0$ thì dừng lại và trả về nghiệm $x=x_k\pm\delta$. Trong đó, $s=1$ khi $x_0=a$ (ứng với dãy $\{x_k\}$ đơn điệu tăng) và $s=-1$ khi $x_0=b$ (ứng với dãy $\{x_k\}$ đơn điệu giảm).

[1] Evariste Galois đã chứng minh rằng với các phương trình có bậc lớn hơn 4 thì không thể giải tổng quát bằng căn thức.

2. Áp dụng

Ví dụ 1. *Tìm nghiệm dương của phương trình:*

$$e^{2x}-7\cos(1-x)-2=0, \qquad (3)$$

với sai số không vượt quá 0,000005.

*** Liên hệ tác giả**
Lê Hải Trung
Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng
Email: trungybvnvr@yahoo.com

Lời giải. Dễ dàng ta nhận thấy phương trình (3) không thể giải được bằng phương pháp biến đổi đại số thông thường. Trong Mathematica, ta lần lượt thực hiện các bước sau đây:

- Bước 1: Nhập hàm $f(x)$:

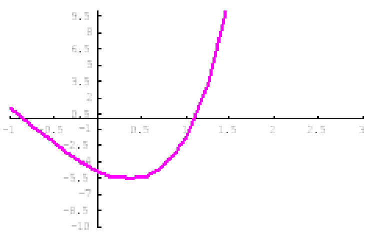
f[x_]:=e^{2x}-7cos[1-x]-2;

Print["f[x]=",f[x]];

f[x]=-2+e^{2x}-7cos[1-x]

- Bước 2: Vẽ đồ thị hàm số đã cho nhằm xác định khoảng phân li nghiệm

Plot[f[x],{x,-1,2},PlotRange $\to$ {{−1,3},{−10,10}},
Ticks $\to$ {Range[-1,3,0.5`],Range[-10,10,1.5`]},
PlotStyle $\to$ {RGBColor[1,0,1],Thickness[0.01]}]



□Graphics□

Với yêu cầu xác định nghiệm dương của bài toán, ta có được khoảng phân li nghiệm là (1,2).

- Bước 3: Tính toán trong Mathematica

f[x_]:=e^{2x}-7cos[1-x]-2;a=1.;b=2.;
delta=0.0000005;
{x,s}=If[f''[a]*f[a]<0,{a,1},{b,-1}];x
For[k=0,f[x]*f[x+s*delta]>0,k=k+1,
x=x-f[x]/f'[x];Print[x]]

1.
1.10901
1.09696
1.09679
1.09679
1.09679

- Bước 4: Kiểm tra kết quả

f[1.09679]
0.0000219789

Ví dụ 2. *Tìm nghiệm của phương trình:*

$$\frac{3x}{x^5+x-1}-e^{(2x^2-1)}+\sin\frac{\pi x}{2}-x-0,7=0. \qquad (4)$$

với sai số không vượt quá 0,000001.

Lời giải. Ta thấy phương trình (4) có độ khó hơn nhiều lần so với phương trình (3). Trong Mathematica, ta lần lượt thực hiện các bước sau đây:

- Bước 1: Nhập hàm $f(x)$:

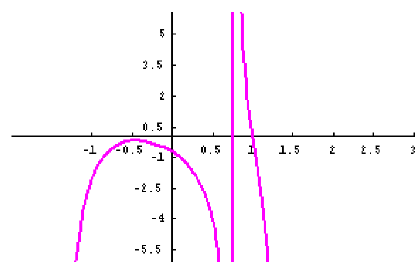
f(x_):= $\frac{3x}{x\text{^}5+x-1}$ -e$^{(2x\text{^}2-1)}$+sin[$\frac{\pi x}{2}$]-x-0.7;

Print["f[x]=",f[x]];

f[x]= -0.7-e$^{(2x\text{^}2-1)}$+$\frac{3x}{x^5+x-1}$+sin[$\frac{\pi x}{2}$]

- Bước 2: Vẽ đồ thị hàm số đã cho nhằm xác định khoảng phân li nghiệm

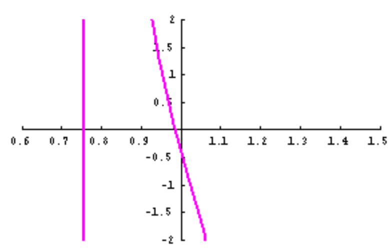
Plot[f[x],{x,-2,3},PlotRange $\to$ {{−2,3},{−6,6}},
Ticks $\to$ {Range[-1,3,0.5`],Range[-10,10,1.5`]},
PlotStyle $\to$ {RGBColor[1,0,1],Thickness[0.01]}]



□Graphics□

Ta có thể làm rõ hơn nữa khoảng phân li nghiệm:

Plot[f[x],{x,0.6,1.5},PlotRange $\to$ {{0.6,1.5},{−2,2}},
Ticks $\to$ {Range[0.6,5,0.1`],Range[-2,2,0.5`]},
PlotStyle $\to$ {RGBColor[1,0,1],Thickness[0.01]}]



□Graphics□

Với yêu cầu xác định nghiệm của bài toán ta lựa chọn khoảng phân li nghiệm là (0.8, 2).

- Bước 3: Tính toán trong Mathematica

$$f(x\_):=\frac{3x}{x^{\wedge}5+x-1}-e^{(2x^{\wedge}2-1)}+\sin[\frac{\pi x}{2}]-x-0.7;a=0.8;b=2;$$

```
delta=0.00000`;
{x,s}=If[f''[a]*f[a]<0,{a,1},{b,-1}];x
For[k=0,f[x]*f[x+s*delta]>0,k=k+1,x=x-f[x]/f'[x];Print[x]]
2.
1.87475
1.74085
1.59607
1.43751
1.26321
1.08607
0.985799
0.984747
0.984747
0.984747
```

- ***Bước 4: Kiểm tra***

```
f[0.984749]
-0.0000101992
```

3. Kết luận

Bằng cách sử dụng phần mềm Mathematica cùng với các ví dụ được minh họa có thể định hướng giải quyết hàng loạt các bài toán giải phương trình tưởng chừng như không thể thực hiện bằng phương pháp cổ điển. Điều đó đã thể hiện được vai trò của ứng dụng công nghệ trong giải quyết các vấn đề trong Toán học. Thông qua các câu lệnh và lập trình trong phần mềm Mathematica, các bài toán rất phức tạp ta có thể được giải quyết một cách khá dễ dàng và thuận lợi.

Tài liệu tham khảo

[1] Bakhvalov N (1977), Numerical Methods: Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations, MIR.

[2] Бакушинский А, Гончарский А (1989), Численные методы, Из-во Московского университета.

[3] Бахвалов Н, Жидков Н, Кобельков Г (2012), Численные методы, Из-во «Лаборатория знаний».

[4] Самарский А, Гулин А (1989), Численные методы, Из-во Наука.

[5] Вержбицкий В (2001), Численные методы, Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва «Высшая школа».

[6] Doãn Tam Hòe (2008), Toán học tính toán, Nhà xuất bản Giáo dục.

[7] Lê Hải Trung, Lê Văn Dũng, Huỳnh Thị Thúy Phượng (2011), Về bài toán truyền nhiệt trong môi trường Mathematica, Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Số: 6[47], Quyển 1, Trang: 1112-120.

[8] Lê Hải Trung (2011), Ứng dụng phần mềm Mathematica cho bài toán truyền nhiệt, Đ2011-03-07

[9] Lê Hải Trung, Huỳnh Thị Thúy Phượng, Nguyễn Văn Hiệu (2011), Ứng dụng phần mềm Mathematica cho lời giải của bài toán truyền nhiệt trong không gian hai chiều, Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Số: 6[47], Quyển 2, Trang: 133-139.

APPLYING THE SOFTWARE MATHEMATICA IN NEWTON'S METHOD TO FIND APPROXIMATE SOLUTIONS OF EQUATIONS

Abstract: This paper presents the application of the software Mathematica to find approximate solutions of the equation $f(x)=0$ by means of the Newton's method (also known as the tangent's method) with regard to specific examples that cannot be dealt with through algebraic transformations. The operation in the software is conducted through the following steps: entering the equation whose root is to be looked for together with errors, drawing charts to determine dissociation distances at the request of the problem viadedicated commands (in some concrete cases, the dissociation process can be further specified), running the programming in Mathematica for the computer to calculate and obtain the approximate solutions of the equation with the given errors, checking the results obtained.

Key words: Newton's method; approximately; dissociation experiments; error; software Mathematica