UED Journal of Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

TÍNH LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ TRONG KHÔNG GIAN VÔ HẠN CHIỀU

Trần Văn Sự

Nhận bài:
28 – 09 – 2015
Chấp nhận đăng:
30 – 11 – 2015
http://jshe.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Mục đích của bài báo này là nghiên cứu tính C-liên tục trên và tính C-liên tục dưới của ánh xạ đa trị trong các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff dưới ngôn ngữ của một nón lồi (hoặc nón lồi đóng) có phần trong khác rỗng. Cụ thể, trong Mệnh đề 3.1, chúng tôi cung cấp một điều kiện cần để trên đồ thị của một ánh xạ đa trị xác định có phần trong không rỗng. Trong Mệnh đề 3.2, chúng tôi nghiên cứu ánh xạ đa trị C-bị chặn trong một lân cận được xác định nào đó. Trong các Định lí 3.3, 3.5, 3.6 và các Hệ quả 3.7, 3.8, chúng tôi đưa ra các điều kiện cần để một ánh xạ đa trị là C-nửa liên tục trên (viết đơn giản C-u.s.c) hay C-nửa liên tục dưới (viết đơn giản C-l.s.c). Trong Định lí 3.4, chúng tôi cung cấp một điều kiện cần và đủ về ánh xạ đa trị C-bị chặn tại một điểm cho trước.

Từ khóa: Tính liên tục của ánh xạ đa trị; Không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff; C-bị chặn; C-tựa lồi dưới; C-u.s.c; C-l.s.c.

1. Giới thiệu

Giải tích đa trị hiện nay là một vấn đề mới cho nghiên cứu toán học, mặc dù chúng đã xuất hiện rất lâu khoảng những năm 30 của thế kỷ XX. Nó có nhiều ứng dụng trong toán học như lý thuyết tối ưu và lý thuyết điều khiển (xem [4])... Vấn đề quan tâm nhất trong ngành giải tích đa trị hiện nay đó là nghiên cứu sự tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu đa trị, các bài toán tựa cân bằng... mà tính liên tục hay tính bị chặn theo nón thứ tự của các hàm đối tượng cũng giữ một vai trò quan trọng. Trong giải tích hàm, một toán tử tuyến tính muốn liên tục tại một điểm chúng ta chỉ cần chỉ ra toán tử đó là bị chặn và một câu hỏi được nảy sinh ngay lúc này là: Khi nào một ánh xạ đa trị là nửa liên tục trên (dưới) theo nón thứ tự và tính nửa liên tục theo nón thứ tự của một ánh xạ đa trị có quan hệ gì với tính bị chặn theo nón thứ tự của nó. Hơn nữa, chúng ta cũng được biết rằng, một ánh xạ đa trị bất kỳ không thể là bị chặn theo nón thứ tự bất kỳ trong các không gian vô hạn chiều được, tuy nhiên một ánh xạ đa trị nửa liên tục theo nón thứ tự và có thêm tính chất compact thì có thể xảy ra điều này. Vì vậy trong bài báo này, chúng tôi lựa chọn chủ đề tính liên tục của ánh xạ đa trị trong không gian vô hạn chiều để tiến hành nghiên cứu cụ thể các vấn đề được nêu bên trên.

2. Cơ sở lý thuyết và các kết quả liên quan

2.1. Cơ sở lý thuyết

2.1.1. Các định nghĩa

(i) Cho X, Y là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, C là một nón trong Y, D là một tập con khác rỗng trong X và $F: D \subseteq X \to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị (ở đây ký hiệu 2^Y thay cho họ của tất cả các tập con của Y). Cho A là một tập con khác rỗng trong Y. Nhắc lại rằng, $x \in A$ là một điểm hữu hiệu Ideal của A tương ứng với C nếu $y \in x + C$ với mọi y trong A. Tập tất cả các điểm hữu hiệu Ideal của A được ký hiệu bởi $IMin(A|C)$. Tập con $C \subseteq Y$ được gọi là một nón trong Y nếu $tc \in C$ với mọi $c \in C, t \geq 0$. Nếu tập C có tính chất T thì ta nói C là nón có tính chất T. Miền của ánh xạ đa trị F ký hiệu là domF:=$\{x \in D | F(x) \neq \phi\}$.

(ii) Ánh xạ đa trị F được gọi C-tựa lồi dưới trên D nếu tập D lồi trong X và mọi x, y $\in D$, $t \in [0,1]$ ta có

* **Liên hệ tác giả**
Trần Văn Sự
Trường Đại học Quảng Nam
Email: tranuu63@gmail.com

$F(tx+(1-t)y) \subseteq F(x)-C$ hoặc

$F(tx+(1-t)y) \subseteq F(\mathrm{y})-C.$

(iii) Ánh xạ đa trị F được gọi là C-bị chặn nếu với mọi W là lân cận của 0 trong Y, tồn tại số thực t>0 sao cho $F(D) \subseteq t\mathrm{W}+C.$ Tập $A \subseteq Y$ được gọi là C-bị chặn nếu với mọi W là lân cận của 0 trong Y, tồn tại số thực t>0 sao cho $A \subseteq t\mathrm{W}+C.$

(iv) Ánh xạ đa trị F được gọi là compact nếu F(D) là tập compact tương đối trong Y, nghĩa là bao đóng của F(D) là compact.

(v) Ánh xạ đa trị F được gọi là C-u.s.c (t.ư C-l.s.c) tại điểm $x_o \in D,$ nếu với mọi W là lân cận của 0 trong Y, tồn tại U là lân cận của x_0 sao cho:

$$F(x) \subseteq F(x_o)+\mathrm{W}+C$$
$$(\ F(x_o) \subseteq F(x)+\mathrm{W}-C\ )$$

với mọi $x \in U \cap d\mathrm{omF}$.

(vi) Ánh xạ đa trị F được gọi là C-u.s.c (t.ư, C-l.s. c) nếu F là C-u.s.c (t.ư, C-l.s.c) tại mọi điểm $x_0 \in D.$ Ánh xạ đa trị F được gọi là C-liên tục nếu F là C-u.s.c và F là C-l.s.c tại mọi điểm $x_0 \in D.$

2.1.2. Các chú ý

Các ký hiệu C-u.s.c thay cho tính C nửa liên tục trên của một ánh xạ đa trị F và C-l.s.c thay cho tính C nửa liên tục dưới của một ánh xạ đa trị F. Từ nay trở đi, nếu không có sự mô tả khác, chúng ta luôn giả sử rằng X, Y, A, D, C và F được mô tả như giới thiệu bên trên.

2.2. Các kết quả liên quan đến bài báo

Trong mục con này, chúng tôi sẽ giới thiệu một số kết quả quan trọng và cần thiết cho các chứng minh của các trang giấy này. Bạn đọc có thể xem chứng minh chi tiết ở các tài liệu tham khảo [1] và [2] ở cuối bài báo.

2.2.1. Bổ đề [2, 3] Giả sử rằng Y được sắp thứ tự bởi một nón C và $y \in A \subseteq Y.$ Sự tương đương sau luôn đúng :

$$y \in IMin(A|C) \Leftrightarrow A \subseteq y+C$$
$$\Leftrightarrow x-y \in C\ (\forall\, x \in A).$$

2.2.2. Bổ đề [1] Cho C là nón lồi đóng trong Y và $F: D \to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị compact. Khi đó nếu điều kiện

$$(*)\quad (\ \forall\, x_\beta \to x_0,\ y_\beta \in F(x_\beta)+C, y_\beta \to y_0 \Rightarrow y_0 \in F(x_0)+C\ )$$

đúng, thì F là C-u.s.c tại điểm x_0.

Ngược lại, nếu F là C-u.s.c tại x_0 với $F(\mathrm{x}_0) \neq \phi$ và $F(\mathrm{x}_0)+\mathrm{C}$ đóng thì lại thu được kết quả (*) đúng.

2.2.3. Bổ đề [2] Cho C là một nón lồi trong Y với phần trong khác rỗng. Khi đó:

$$C+C=C, \quad C+\operatorname{int}C=\operatorname{int}C,$$
$$tC \subseteq C\ \ (\forall t \geq 0).$$

3. Kết quả mới của bài báo

Sau đây chúng tôi sẽ giới thiệu một số kết quả mới về tính liên tục hoặc sự bị chặn của một ánh xạ đa trị F trong các không gian lồi địa phương X, Y theo ngôn ngữ của một nón lồi (có thể đóng) với phần trong không rỗng.

3.1. Mệnh đề Cho X, Y là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, D là tập con khác rỗng chứa trong X và Y được sắp thứ tự bởi một nón lồi C có phần trong khác rỗng. Cho một ánh xạ đa trị $F: D \to 2^Y$. Ký hiệu bởi

$$EPI(F)=\{\ (\mathrm{x}, \alpha) \in \mathrm{D} \times \mathrm{Y} \mid F(x) \subseteq \alpha+C\},$$

Khi đó int (EPI(F)) $\neq \phi$ nếu tồn tại một lân cận U nào đó của một điểm x_0 nào đó nằm trong tập con xác định D sao cho

$$IMin(F(U)|C) \neq \phi.$$

Chứng minh: Gọi U là một lân cận nào đó của một điểm x_0 nào đó trong D sao cho $IMin(F(U)|C) \neq \phi.$ Lấy tiếp phần tử $\alpha_0 \in IMin(F(U)|C),$ theo kết quả Bổ đề 2.2.1 ta có $F(U) \subseteq \alpha_0+C.$ Tiếp theo ta đặt

$$V_{\alpha_0}=\{(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \in \mathrm{D} \times \mathrm{Y}: \mathrm{x} \in \mathrm{U},\ \alpha_0 \in \mathrm{z}+\mathrm{intC}\}.$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng tập $V_{\alpha_0} \neq \phi,$ $V_{\alpha_0} \subseteq EPI(F)$ và V_{α_0} mở trong $D \times Y.$

Thật vậy, vì nón lồi C có phần trong khác rỗng, nên ta có thể lấy phần tử e thuộc int(C) và đặt z = α_0 - e, khi đó hiển nhiên ta luôn có $(U,z)\subseteq V_{\alpha_0}$. Điều này suy ra được rằng tập $V_{\alpha_0}\neq\phi.$ Lấy tuỳ ý (x, z) $\in V_{\alpha_0}$, khi đó tồn tại lân cận mở U_0 của x trong D và hơn nữa, theo giả thiết ta có int(C) không rỗng, do đó tồn tại một lân cận mở V_0 của z sao cho $(U_0,V_0)\subseteq V_{\alpha_0}$. Suy ra V_{α_0} là tập mở. Cuối cùng, lấy tuỳ ý một cặp (x, z) $\in V_{\alpha_0}$, ta có $x\in U$ và $\alpha_0\in z+\mathrm{int}(C)$ nên dễ dàng suy ra được kết quả sau

$$F(x)\subseteq\alpha_0+C=(\alpha_0-z)+z+C$$
$$\subseteq z+\mathrm{int}(C)+C=z+\mathrm{int(C)}\subseteq z+C$$

do C là nón lồi trong Y. Vậy, ta đã chứng minh được $(x,z)\in EPI(F).$ Điều này chỉ ra được rằng int(EPI(F)) $\neq\phi$ và Mệnh đề 3.1 được chứng minh xong.

3.2. Mệnh đề Với các giả thiết được xác định như ở Mệnh đề 3.1. Giả sử tồn tại một lân cận U nào đó trong D sao cho $IMin(F(U)\,|\,C)\neq\phi.$ Khi đó F(U) là C-bị chặn trong Y.

Chứng minh: Thật vậy, lấy tuỳ ý $\alpha_0\in IMin(F(U)\,|\,C)$ và t > 0 là một số thực dương sao cho với mọi W là lân cận của gốc trong Y, ta có $\alpha_0\in t\mathrm{W}.$ Theo định nghĩa điểm hữu hiệu Ideal đối với nón C, nó kéo theo rằng $F(U)\subseteq t\mathrm{W}+C.$ Vậy F(U) là C-bị chặn trong Y và Mệnh đề 3.2 được chứng minh xong.

3.3. Định lí Cho D là một tập con trong không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff X, $F:D\to 2^Y$ là ánh xạ đa trị, C$\subseteq Y$ là nón lồi đóng trong Y và hơn nữa ánh xạ đa trị F là compact. Giả sử rằng tồn tại một lân cận U nào đó của điểm $\overline{x}\in D$ sao cho $F(\overline{x})\cap IMin(F(U)\,|C)\neq\phi.$ Khi đó F là C-u.s.c tại $\overline{x}.$

Chứng minh: Chúng ta áp dụng Bổ đề 2.2.2 nêu ở phần giới thiệu cho chứng minh Định lí 3.1 như sau: Gọi x_β là một dãy tuỳ ý trong D hội tụ về $\overline{x}$ và y_β là một dãy tuỳ ý trong F(x_β) + C hội tụ về y_0. Chúng ta phải chỉ ra rằng $y_0\in F(\overline{x})+C.$ Theo Tấn và Lin[1] thì F là C-u.s.c tại $\overline{x}.$ Thật vậy, ta có $x_\beta\to\overline{x}$ nên tồn tại $\beta_1>0$ sao cho $x_\beta\in U$ với mọi $\beta\geq\beta_1.$ Lấy tùy ý điểm

$$\overline{y}\in F(\overline{x})\cap IMin(F(U)\,|C),$$

Thì $\overline{y}\in F(\overline{x})$, $F(U)\subseteq\overline{y}+C.$ Với mọi $\beta\geq\beta_1,$ ta có $y_\beta\in F(x_\beta)+C\subseteq F(U)+C$. Suy ra $y_\beta\in\overline{y}+C\ \ \forall\beta\geq\beta_1.$ Vì $\overline{y}+C$ đóng trong Y do C là nón đóng nên cho $\beta\to+\infty$ ta được $y_0\in\overline{y}+C.$ Từ đây suy ra $y_0\in F(\overline{x})+C.$ Vậy F là C-u.s.c tại $\overline{x}$ và Định lí 3.1 được chứng minh đầy đủ.

3.4. Định lí Cho D là tập con trong không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff X, $F:D\to 2^Y$ là ánh xạ đa trị C-u.s.c, C$\subseteq Y$ là nón lồi trong Y và $x_0\in D\cap d$omF. Khi đó F là C-bị chặn tại x_0 khi và chỉ khi F là C-bị chặn trong một lân cận nào đó của x_0 trong D.

Chứng minh: Chiều ngược lại của Định lí 3.4 là hiển nhiên. Chúng ta chứng minh chiều thuận. Giả sử F là C-bị chặn tại x_0, khi đó với mọi W là lân cận lồi của gốc 0 trong Y, tồn tại $t_0>0$ sao cho $F(x_0)\subseteq t_0\mathrm{W}+C.$ Mặc khác, F là C-u.s.c nên F là C-u.s.c tại x_0, khi đó với mọi W là lân cận lồi của gốc 0 trong Y (vẫn chọn lân cận lồi W như ở trên), tồn tại U là lân cận của x_0 trong D sao cho $F(x)\subseteq F(x_o)+\mathrm{W}+C$ với mọi $x\in U\cap d$omF. Suy ra rằng

$$F(x)\subseteq t_0\mathrm{W}+\mathrm{W}+C$$

do nón C lồi trong Y. Do cách chọn W là một tập lồi và C là một nón lồi như trong giả thiết nên suy ra được $F(x)\subseteq t\mathrm{W}+C$ với t:=t_0+1. Điều này đúng với mọi $x\in U\cap d$omF. Vậy F là C-bị chặn trong một lân cận U của x_0 trong D và Định lí 3.4 được chứng minh xong.

3.5. Định lí Cho D là một tập con lồi cân đối trong X. Giả sử rằng Y được sắp thứ tự bởi một nón lồi C và $F:D\to 2^Y$ là ánh xạ đa trị C-tựa lồi dưới trên D với

$0 \in F(\mathrm{x}) - \mathrm{C}\ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{D}$. Khi đó, nếu F là (-C)- bị chặn trong một lân cận U nào đó trong D thì F là C-l.s.c trên U.

Chứng minh: Giả sử U là một lân cận nào đó trong D sao cho F là (-C)-bị chặn trên U. Vì D cân đối nên ta có thể xem U cân đối. Lấy điểm $x_0 \in U$ tuỳ ý. Gọi W là một lân cận tuỳ ý của gốc 0 trong Y, khi đó theo định nghĩa tồn tại số thực $t_0>0$ sao cho $F(U) \subseteq t_0\mathrm{W} - C$. Không mất tính tổng quát của bài toán ta xem $x_0=0$. Đặt tiếp tập $U_0 = \min\{t_0, 1\}\mathrm{U}$ thì $U_0 = -U_0$ và là một lân cận của gốc 0 trong D. Xét tùy ý $x \in U_0$ với $F(\mathrm{x}) \neq \phi$, ta có $-xt_0^{-1} \in U$. Từ đó ta có phân tích sau:

$$0 = \frac{1}{t_0+1}x + \frac{t_0}{1+t_0}(-\frac{1}{t_0}x) \in \mathrm{D}$$

do $x \in U_0 \subseteq D$, $(-\frac{1}{t_0}x) \in \mathrm{U} \subseteq D$ theo giả thiết và bằng cách áp dụng định nghĩa về tính C-tựa lồi dưới trên D của ánh xạ đa trị F a được

$$F(0) = F\left(\frac{1}{1+t_0}x + \frac{t_0}{1+t_0}\left(-t_0^{-1}x\right)\right) \subseteq F(x) - C \text{ hoặc}$$

$$F(0) = F\left(\frac{1}{1+t_0}x + \frac{t_0}{1+t_0}\left(-t_0^{-1}x\right)\right) \subseteq F(-t_0^{-1}x) - C.$$

Nếu xảy ra trường hợp đầu thì $F(0) \subseteq \mathrm{F(x)} - \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{F}(0) \subseteq \mathrm{F(x)} + \mathrm{W\text{-}C}$ vì W chứa gốc và theo định nghĩa, F là C-l.s.c tại 0. Nếu xảy ra trường hợp sau thì $F(0) \subseteq \mathrm{F(U)} - \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{F}(0) \subseteq t_0\mathrm{W\text{-}C}$ vì C+C=C. Do $0 \in F(\mathrm{x}) - \mathrm{C}$ nên

$\mathrm{F}(0) \subseteq F(\mathrm{x}) - \mathrm{C} + \mathrm{t}_0\,\mathrm{W} - C \subseteq F(\mathrm{x}) + \mathrm{t}_0\,\mathrm{W} - C$ và hệ quả F là C-l.s.c tại 0. Định lí 3.5 được chứng minh xong.

3.6. Định lí Dưới các giả thiết của Định lí 3.5 nhưng ở đây $0 \in F(\mathrm{x}) + \mathrm{C}\ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{D}$ và ánh xạ đa trị F là (-C)-tựa lồi dưới trên D và C-bị chặn trong một lân cận U nào đó trong D. Khi đó, F là C-u.s.c trên U.

Chứng minh: Xét một nón mới Q với $Q = -C$. Khi đó F là Q- tựa lồi dưới trên D và (-Q)-bị chặn trong một lân cận U nào đó trong D. Theo Định lí 3.5, F là Q-l.s.c trên U mà điều này tương đương với F là (-C)-l.s.c trên U. Theo định nghĩa tính C-u.s.c, ta khẳng định rằng F là C-u.s.c trên U và chứng minh là đầy đủ.

3.7. Hệ quả Dưới các giả thiết của Định lí 3.3 nhưng ở đây nón lồi C được thay thế bởi nón $C \cap -C$ và ngoài ra

$0 \in \left(F(\mathrm{x}) - \mathrm{C}\right) \cap \left(F(\mathrm{x}) + \mathrm{C}\right)\ \ (\forall \mathrm{x} \in \mathrm{D})$ Khi đó ta kết luận rằng F liên tục trên U.

Chứng minh: Hiển nhiên có được kết quả từ các Định lí 3.5 và 3.6 trên với chú ý F liên tục trên U khi và chỉ khi F là C-l.s.c trên U và C-u.s.c trên U.

3.8. Hệ quả Cho D là tập lồi cân đối trong không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff X, $F : D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị, $\mathrm{C} \subseteq Y$ là nón lồi đóng trong Y có phần trong khác rỗng, F là (-C)-tựa lồi dưới trên D với $0 \in F(\mathrm{x}) + \mathrm{C}\ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{D}$. Giả sử rằng tồn tại một lân cận U nào đó trong D sao cho $\mathrm{IMin(F(U)} \mid \mathrm{C)} \neq \phi$. Khi đó F là C-u.s.c trên U.

Chứng minh: Bằng cách áp dụng Mệnh đề 3.2 và kết quả thu được từ Định lí 3.6. Điều phải chứng minh.

4. Kết luận

Bài báo đã chỉ ra được mối quan liên hệ giữa tính C-bị chặn tại một điểm với tính C-bị chặn trong một lân cận tại điểm đó của một ánh xạ đa trị theo quan hệ một nón. Ngoài ra, bài báo cũng đã khảo sát một số tính chất như tính C-u.s.c, C-l.s.c của một ánh xạ đa trị theo quan hệ một nón lồi, có thể đóng. Các kết quả trong bài báo là hoàn toàn mới và có thể áp dụng để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu α vector tổng quát (xem định nghĩa bài toán trong [3]).

Tài liệu tham khảo

[1] Lai-Jin Lin and Nguyen Xuan Tan (2006), On Systems of Quasivariational Inclusion Problems of Type I and Related Problems, Vietnam J. Math. 34, 423-440.

[2] Luc, D.T (1989), Theory of Vector Optimization, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, spring Verlag, Berlin, Germany, Vol 319.

[3] Trần Văn Sự (2012), Khảo sát tính chất nghiệm của bài toán $(GVOP)_\alpha : F(\bar{x}) \cap \alpha\,\mathrm{Min(F(D)} \mid \mathrm{C)} \neq \phi$, $\bar{x} \in D$, $\alpha \in \{\mathrm{I, P, W}\}$, Journal of Science of Hnue,

Natural Sci., Vol. 57, No 3, pp. 41-47.
[4] Nguyễn Đông Yên (2007), Giáo trình Giải tích đa trị, Nhà xuất bản Khoa học - Tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội.

THE CONTINUITY OF SET-VALUED MAPPING IN INFINITE-DIMENSIONAL SPACES

Abstract: The purpose of this paper is to investigate the upper C-continuity and the lower C-continuity of set-valued mapping (or multivalued mapping) in Hausdorff locally convex topological linear spaces by means of a convex cone (or a closed convex cone) with its nonempty interior. Specifically, in Proposition 3.1 we provide a necessary condition for the epigraph of the set-valued mapping with its nonempty interior. In Proposition 3.2, we research the C-bounded set-valued mapping in a certain given neighbourhood. In theorems 3.3, 3.5, 3.6 and corollaries 3.7, 3.8, we introduce necessary conditions for the set-valued mapping to become either upper C-semicontinuous or lower C-semicontinuous (C-u.s.c or C-l.s.c in abbreviation) In theorem 3.4, we provide a necessary and sufficient condition about the C-bounded set-valued mapping at a given point.

Key words: the continuity of set-valued mapping; Hausdorff locally convex topological linear space; C-bounded; lower C-quasiconvex; C-u.s.c; C-l.s.c.