UED Journal of Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

Nhận bài:
15 – 01 – 2015
Chấp nhận đăng:
25 – 03 – 2015
http://jshe.ued.udn.vn/

XẤP XỈ PHÂN PHỐI CHUẨN ĐỐI VỚI DÃY HIỆU UNORDERED MARTINGALE

Lê Văn Dũng[a*], Lê Trần Phương Thanh[b]

Tóm tắt: Trong các định lý giới hạn của lý thuyết xác suất thì Định lý giới hạn trung tâm đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu thống kê và ứng dụng. Tuy nhiên, bài toán thống kê nói chung không cho phép chúng ta nhiên cứu với cỡ mẫu lớn vô hạn. Vì vậy bài toán "xấp xỉ phân phối chuẩn" cho phép chúng ta ước lượng được cỡ mẫu cần thiết để có thể áp dụng được Định lí giới hạn trung tâm. Năm 1970, Charler Stein đã giới thiệu một phương pháp xấp xỉ phân phối chuẩn mới và được gọi là *phương pháp Stein*. Các kết quả nghiên cứu chủ yếu đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập. Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập một số kết quả về xấp xỉ phân phối chuẩn đối với dãy biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale. Các kết quả này là mở rộng của các kết quả đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập.

Từ khóa: xấp xỉ phân phối chuẩn; biến ngẫu nhiên; hiệu unordered martingale; bất đẳng thức Berry-Esssen; định lí giới hạn trung tâm.

1. Giới thiệu

Cho $(X_n; n\in \mathbf{N}^*)$ là dãy biến ngẫu nhiên có kì vọng 0 và phương sai σ^2 hữu hạn. Đặt $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Kí hiệu $F_n(x)$ và $\Phi(x)$ lần lượt là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $S_n / \sigma\sqrt{n}$ và biến ngẫu nhiên chuẩn tắc. Định lí giới hạn trung tâm cổ điển nói rằng: nếu $(X_n; n\in \mathbf{N}^*)$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối xác suất thì $F_n(x)$ hội tụ đến $\Phi(x)$ khi $n\to\infty$ với mọi $x\in\mathbf{R}$. Tốc độ hội tụ của định lí giới hạn trung tâm được Berry [1] và Esseen [4] chỉ ra rằng:

$$\sup_{x\in R} |F_n(x) - \Phi(x)| = O(n^{-1/2}) \text{ khi } n\to\infty.$$

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu tốc độ hội tụ định lí giới hạn trung tâm của dãy biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale.

Dãy biến ngẫu nhiên $(X_n; n\in \mathbf{N}^*)$ xác định trên không gian xác suất $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ được gọi là *hiệu unordered martingale* nếu thỏa mãn hai điều kiện:

(i) $E(|X_j|) < \infty \quad \forall j,$

(ii) $E(X_j / \mathcal{F}_j) = 0 \ \forall j,$ trong đó $\mathcal{F}_j = \sigma(X_i : i \neq j).$

Khái niệm hiệu unordered martingale trên được Choi và Klass đưa ra trong bài báo [2]. Khái niệm này được chúng tôi mở rộng như sau:

Cho m là số nguyên không âm. Dãy biến ngẫu nhiên $(X_n; n\in \mathbf{N}^*)$ được gọi là *hiệu m-unordered martingale* nếu thỏa mãn hai điều kiện:

(i) $E(|X_j|) < \infty \quad \forall j,$

(ii) Với mỗi $i \geq 1,$ $E(X_j / \mathcal{F}_i) = 0$ với mọi $j = i+1, ..., i+m$,

Trong đó $\mathcal{F}_j$ là σ - đại số sinh bởi các biến ngẫu nhiên $\{\xi_i, j\leq i\}$ và $\{\xi_j, j > i+m\}$.

Như vậy một dãy những biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale là hiệu 0 - unordered martingale.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

Để chứng minh kết quả chính ta cần nhắc lại một số khái niệm và tính chất của phương pháp Stein.

Gọi Z là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc. Với h là hàm liên tục tuyệt đối sao cho

[a] Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng
[b] Học viên cao học K27 Toán sơ cấp, ĐHĐN
*** Liên hệ tác giả**
Lê Văn Dũng
Email: lvdunght@gmail.com
Điện thoại: 0935110108

$E|h(Z)|<\infty$. Phương trình sau được gọi là phương trình Stein.

$$f'(\omega)-\omega f(\omega)=h(\omega)-Eh(Z)$$

Nghiệm tổng quát $f=f_h$ của phương trình Stein là:

$$f_h(\omega)=-e^{\frac{\omega^2}{2}}\int_{\omega}^{\infty}[h(x)-Eh(Z)]e^{\frac{-x^2}{2}}dx$$

Nghiệm $f=f_h$ có một số tính chất sau (xem [3]):

(i) $\|f_h\|\le 2\|h'\|$

(ii) $\|f_h'\|\le\sqrt{2/\pi}\|h'\|$

(iii) $\|f_h''\|\le 2\|h'\|$.

2.1. Đẳng thức Stein

Cho $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ là những biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale sao cho $\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2=1$. Đặt

$$W:=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

$$W^{(i)}:=W-\xi_i,$$

$$K_i(t):=E\{\xi_i(I_{\{0\le t\le\xi_i\}}-I_{\{\xi_i\le t<0\}})\}.$$

Với h là hàm liên tục tuyệt đối sao cho $E|h(Z)|<\infty$, gọi $f=f_h$ là nghiệm của phương trình Stein. Ta có:

$$E[Wf_h(W)]=E[(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)f_h(W)]=\sum_{i=1}^{n}E[\xi_i f_h(W)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E[\xi_i(f(W)-f(W^{(i)}))]\ (\text{do } E(\xi_i|F_i)=0,\forall i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E[\xi_i\int_0^{\xi_i}f'(W^{(i)}+t)dt]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E[-\xi_i\int_{\xi_i}^{0}f'(W^{(i)}+t)dt]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E[\int_{-\infty}^{\infty}f_h'(W^{(i)}+t)\xi_i(I_{0\le t\le\xi_i}-I_{\xi_i\le t<0})dt]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}E[f_h'(W^{(i)}+t)]K_i(t)dt\ .$$

Ta lại có

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}K_i(t)dt=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2=1$$

nên

$$Ef_h'(W)=Ef_h'(W)\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}K_i(t)dt$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}E\{f_h'(W)\}K_i(t)dt.$$

Do đó,

$$E[f_h'(W)-Wf_h(W)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}E\{f_h'(W)-f_h'(W^{(i)}+t)\}K_i(t)dt$$

Vì vậy ta có:

$$Eh(W)-Eh(Z)=[f'(W)-Wf(W)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}E\{f'(W)-f'(W^{(i)}+t)\}K_i(t)dt.$$

Đẳng thức trên được chúng tôi gọi là *Đẳng thức Stein*.

2.2. Định lí ([3], Định lí xấp xỉ phân phối chuẩn tổng quát)

Giả sử tồn tại hằng số $\delta>0$ sao cho với mọi hàm Lipschitz h ta đều có:

$$|E(h(W))-E(h(Z))|\le\delta\|h'\|$$

Khi đó,

$$\|F_W-\Phi\|_1=\sup_{h\in L(1)}|E(h(W)-E(h(Z))|\le\delta$$

và

$$\|F_W-\Phi\|_\infty$$

$$=\sup_{x\in\mathbf{R}}|P(W\le x)-P(Z\le x)|\le 2\sqrt{\delta}$$

3. Kết quả và đánh giá

3.1. Định lí

Cho $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ là những biến ngẫu nhiên unordered martingale thỏa mãn $E|\xi_1|^3<\infty$ với mỗi

$1\le i\le n$, *và* $\sum_{i=1}^{n} E\xi_i^2=1$. *Đặt* $W=\xi_1+\dots\xi_n$. *Khi đó ta có:*

$$\| F_W-\Phi\|_1\le 3\sum_{i=1}^{n}E\,|\,\xi_i\,|^3$$

và

$$\| F_W-\Phi\|_\infty\le 2\sqrt{3\sum_{i=1}^{n}E\,|\,\xi_i\,|^3}.$$

Chứng minh. Từ đẳng thức Stein:

$$Ef_h'(W)-Wf_h(W)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}E\{f_h'(W)-f_h'(W^{(i)}+t)\}K_i(t)dt$$

và theo tính chất nghiệm của phương trình Stein $\| f_h''\|\le 2\| h'\|$, ta có:

$$|Ef_h'(W)-Wf_h(W)|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}E\,|\,f_h'(W)-f_h'(W^{(i)}+t)\,|\,K_i(t)dt$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}E\,|\,f_h'(W^{(i)}+\xi_i)-f_h'(W^{(i)}+t)\,|\,K_i(t)dt$$

$$\le 2\| h'\|\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}E(|\,\xi_i\,|+|\,t\,|)K_i(t)dt$$

$$\le 2\| h'\|\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\,t\,|\,K_i(t)dt+\int_{-\infty}^{\infty}E\,|\,\xi_i\,|\,K_i(t)dt\right)$$

$$=2\| h'\|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{E\,|\,\xi_i\,|^3}{2}+E\,|\,\xi_i\,|\,E\xi_i^2\right)$$

$$\le 2\| h'\|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{E\,|\,\xi_i\,|^3}{2}+E\,|\,\xi_i\,|^3\right)$$

$$=3\| h'\|\sum_{i=1}^{n}E\,|\,\xi_i\,|^3$$

Áp dụng Định lí 2.2 ta có điều phải chứng minh.

3.2. Định lí

Cho $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ *là những biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale thỏa mãn* $\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2=1$. *Khi đó*

$$\| F_W-\Phi\|_1\le 4(4\beta_2+3\beta_3)$$

và

$$\| F_W-\Phi\|_\infty\le 2\sqrt{4(4\beta_2+3\beta_3)}$$

với

$$\beta_2=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2 I_{\{|\xi_i|>1\}}\ \text{và}\ \beta_3=\sum_{i=1}^{n}E\,|\,\xi_i\,|^3\, I_{\{|\xi_i|\le 1\}}.$$

Chứng minh. Sử dụng các tính chất nghiệm của phương trình Stein ta có

$$|\,f_h'(W)-f_h'(W^{(i)}+t)\,|=|\,f_h'(W^{(i)}+\xi_i)-f_h'(W^{(i)}+t)\,|$$

$$\le\| f_h''\|.|\,\xi_i-t\,|\le\| f_h''\|(|\,\xi_i\,|+|\,t\,|)$$

$$\le 2\| h'\|(|\,\xi_i\,|+|\,t\,|)\ .$$

hơn nữa,

$$|\,f_h'(W)-f_h'(W^{(i)}+t)\,|\ \le|\,f_h'(W)\,|+|\,f_h'(W^{(i)}+t)\,|$$

$$\le 4\| h'\|+4\| h'\|=8\| h'\|\ .$$

Suy ra

$$|\,f'(W)-f_h'(W^{(i)}+t)\,|$$

$$\le min(8\| h'\|, 2\| h'\|(|\,\xi_i\,|+|\,t\,|))$$

$$=8\| h'\|.min\left(1,\frac{|\,\xi_i\,|+|\,t\,|}{4}\right)$$

$$\le 8\| h'\|.min(1,|\,\xi_i\,|+t)$$

$$\le 8\| h'\|(|\,t\,|\wedge 1+|\,\xi_i\,|\wedge 1)\ .$$

Mặt khác từ Đẳng thức Stein ta có

$$|Eh(W)-Eh(Z)|$$

$$\le 8\| h'\|\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}E\{|\,t\,|\wedge 1+|\,\xi_i\,|\wedge 1\}K_i(t)dt$$

$$=8\| h'\|\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}E(|\,t\,|\wedge 1)K_i(t)dt\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}E(|\,\xi_i\,|\wedge 1)K_i(t)dt\right)\ .$$

Suy ra

$$|Eh(W)-Eh(Z)|$$

$$\le 8\| h'\|\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}E\{|\,t\,|\wedge 1\}K_i(t)dt+E\xi_i^2E(|\,\xi_i\,|\wedge 1).$$

Đặt

$$A=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}E\{|t|\wedge 1+|\xi_i|\wedge 1\}K_i(t)dt.$$

Ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty}(|t|\wedge 1\{I_{[0;x]}(t)-I_{[-x;0)}(t)\})dt$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}|x|+|x|(|x|-1) & \text{khi } |x|>1\\ \frac{1}{2}|x|^3, & \text{khi } |x|\le 1\end{cases}$$

vì vậy

$$A=\sum_{i=1}^{n}(\int_{-\infty}^{\infty}E\{|t|\wedge 1+|\xi_i|\wedge 1\}K_i(t)dt$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}E\{|\xi_i|^3 I_{\{|\xi_i|\le 1\}}\}$$

$$+E\{(\frac{1}{2}|\xi_i|+|\xi_i|(|\xi_i|-1))I_{\{|\xi_i|\ge 1\}}\}+E\xi_i^2E(|\xi_i|\wedge 1))$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(E\{|\xi_i|^2 I_{\{|\xi_i|\ge 1\}}\}-\frac{1}{2}E\{|\xi_i|I_{\{|\xi_i|\ge 1\}}\}$$

$$+\frac{1}{2}E\{|\xi_i|^3 I_{\{|\xi_i|\le 1\}}\}+E\xi_i^2E(|\xi_i|\wedge 1))$$

$$=\beta_2+\frac{1}{2}\beta_3+\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2E(|\xi_i|\wedge 1)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}E\{|\xi_i|I_{\{|\xi_i|\ge 1\}}\}$$

$$\le\beta_2+\frac{1}{2}\beta_3+\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2E(|\xi_i|\wedge 1).$$

Mặt khác, vì cả hai hàm x^2 và $(x\wedge 1)$ là hàm tăng theo $x>0$, với biến ngẫu nhiên ξ_i ta có

$$E\xi_i^2E(|\xi_i|\wedge 1)\le E\xi_i^2(|\xi_i|\wedge 1)$$
$$=E\{|\xi_i|^3 I_{\{|\xi_i|\le 1\}}\}+E\xi_i^2I_{\{|\xi_i|>1\}}.$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2E(|\xi_i|\wedge 1)$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}E|\xi_i|^3 I_{\{|\xi_i|\le 1\}}+\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2I_{\{|\xi_i|>1\}}=\beta_2+\beta_3$$

Vì vậy

$$Eh(W)-Eh(Z)|$$

$$|\le 8\|h'\|(2\beta_2+\frac{3}{2}\beta_3)=4(4\beta_2+3\beta_3)\|h'\|.$$

Áp dụng Định lí 2.2 ta có điều phải chứng minh.

Từ Định lí 2.6 ta thiết lập được Định lý giới hạn trung tâm Lindeberg đối với dãy biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale sau.

3.3. Hệ quả

Cho $X_1, X_2,..., X_n$ *là những biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale thỏa mãn* $E(X_i^2)<\infty$. *Đặt*

$$S_n:=\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ và } B_n^2:=\sum_{i=1}^{n}EX_i^2.$$

Nếu $\forall\varepsilon>0$,

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}E\{X_i^2I_{\{|X_i|>\varepsilon B_n\}}\}\to 0,\text{ khi } n\to\infty$$

thì

$$\sup_z|P(S_n/B_n\le z)-\Phi(z)|\to 0 \text{ khi } n\to\infty.$$

Chứng minh. Đặt $\xi_i=X_i/B_n$ và $W=S_n/B_n$. Khi đó ξ_i là những biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale thỏa mãn:

$$\begin{cases}E(\xi_i\,|\,\mathrm{F}_i)=\frac{1}{B_n}E(X_i\,|\,\mathrm{F}_i)=0\\ \sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2=\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=1\end{cases}$$

và biến ngẫu nhiên $W=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$

Với $0<\varepsilon<1$ bất kỳ ta có

$$\beta_2+\beta_3$$

$$=\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}E\{X_i^2I_{\{|X_i|>B_n\}}\}+\frac{1}{B_n^3}\sum_{i=1}^{n}E\{|X_i|^3 I_{\{|X_i|\le B_n\}}\}$$

$$=\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}E\{X_i^2I_{\{|X_i|>B_n\}}\}+\frac{1}{B_n^3}\sum_{i=1}^{n}E\{|X_i|^3 I_{\{|X_i|<\varepsilon B_n\}}\}$$

$$+\frac{1}{B_n^3}\sum_{i=1}^{n}E\{|X_i|^3 I_{\{\varepsilon B_n\le|X_i|\le B_n\}}\}$$

$$\leq \frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} E\{X_i^2 I_{\{|X_i|>B_n\}}\} + \frac{\varepsilon}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} E\{X_i^2 I_{\{|X_i|<\varepsilon B_n\}}\}$$

$$+\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} E\{X_i^2 I_{\{\varepsilon B_n \leq |X_i| \leq B_n\}}\}$$

$$=\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} E\{X_i^2 I_{\{|X_i|\geq \varepsilon B_n\}}\} + \frac{\varepsilon}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} E\{X_i^2 I_{\{|X_i|<\varepsilon B_n\}}\}$$

$$\leq \frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} E\{X_i^2 I_{\{|X_i|>\varepsilon B_n\}}\} + \frac{\varepsilon}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2$$

$$=\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} E\{X_i^2 I_{\{|X_i|>\varepsilon B_n\}}\} + \varepsilon \ (*)$$

Nếu $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} E\{X_i^2 I_{\{|X_i|>B_n\}}\} \to 0, \text{ khi } n \to \infty$$

thì từ (*) suy ra $\beta_2 + \beta_3 \to 0$, khi $n \to \infty$ Theo Định lý 2.6 ta có

$$\sup_z |P(W \leq z) - \Phi(z)|$$

$$= \sup_z |P(S_n / B_n \leq z) - \Phi(z)|$$

$$\leq 2\delta^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{4(4\beta_2 + 3\beta_3)}$$

$$\leq 8\sqrt{\beta_2 + \beta_3} \to 0 \text{ khi } n \to \infty .$$

3.4. Định lí

Cho $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *là những biến ngẫu nhiên hiệu* m *-unordered martingale thỏa mãn* $\sum_{i=1}^{n} E\xi_i^2 = 1$. *Với mỗi* i *, đặt* $A_i = \{i+1, \ldots, i+m\}$, $\eta_i = \sum_{j \in A_i} \xi_j$.

Khi đó

$$\| F_W - \Phi \|_1 \leq \delta$$

và

$$\| F_W - \Phi \|_\infty \leq 2\sqrt{\delta}$$

với

$$\delta = 4E\left|\sum_{i\in J}\{\xi_i\eta_i - E\{\xi_j\eta_i\}\}\right| + \sum_{i\in J} E|\xi_i\eta_i^2|,$$

trong đó $W = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Chứng minh. Gọi $f = f_h$ là nghiệm của phương trình Stein. Ta có:

$$E\{Wf_h(W)\} = E(\sum_{i\in J}\xi_i f_h(W))$$

$$= \sum_{i\in J} E\xi_i [f_h(W) - f_h(W - \eta_i)]$$

Vì vậy

$$E\{Wf_h(W)\} =$$

$$\sum_{i\in J} E\{\xi_i [f_h(W) - f_h(W-\eta_i) - \eta_i f_h'(W)]\}$$

$$+ E\{(\sum_{i\in J}\xi_i\eta_i) f_h'(W)\}$$

Mặt khác, do $E(\xi_j \mid \mathrm{F}_i) = 0$, $\forall j = i+1, \ldots, i+m$ nên ta có:

$$1 = EW^2 = E\{\sum_{i\in J}\xi_i W\} = \sum_{i\in J} E\{\xi_i W\}$$

$$= \sum_{i\in J} E\{\xi_i (W - \eta_i) + \eta_i\xi_i\} = \sum_{i\in J} E\{\eta_i\xi_i\}$$

Do vậy

$$E\{f_h'(W) - Wf_h(W)\}$$

$$= E[(\sum_{i\in J} E\{\xi_i\eta_i\}) f_h'(W)] - E\{Wf_h(W)\}$$

$$= -E(\sum_{i\in J}\{\xi_i\eta_i - E(\xi_i\eta_i)\}) f_h'(W)$$

$$-\sum_{i\in J} E\{\xi_i [f_h(W) - f_h(W-\eta_i) - \eta_i f_h'(W)]\} .$$

Mặt khác, theo tính chất nghiệm của phương trình Stein ta có $\| f_h \| \leq 4\| h \|$ và $\| f_h \| \leq 2\| h \|$.

Áp dụng khai triển Taylor ta được

$$f_h(W - \eta_i) = f_h(W) - \eta_i f_h'(W) + \frac{\eta_i^2}{2} f_h''(W) + \ldots$$

$$\leq f_h(W) - \eta_i f_h'(W) + \eta_i^2 \| h \|$$

Do vậy

$$|h(W) - Eh(Z)| \leq \| h \| \{4E\left|\sum_{i\in J}\{\xi_i\eta_i - E(\xi_i\eta_i)\}\right|$$

$$+ \sum_{i\in J} E|\xi_i\eta_i^2|\}.$$

Áp dụng Định lí 2.2 ta có điều phải chứng minh.

3.5. Đánh giá

Khái niệm dãy biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale là một mở rộng của khái niệm dãy biến ngẫu nhiên độc lập, tương tự như vậy, khái niệm hiệu m - unordered martingale cũng là một mở rộng của khái niệm m – phụ thuộc. Ví dụ minh họa cho sự tồn tại các khái niệm này như sau:

Cho $(Y_n; n \in \mathbf{N}^*)$ là dãy biến ngẫu nhiên m – phụ thuộc, có cùng phân phối xác suất Bernoulli đối xứng, tức là

$$P(Y_n = -1) = P(Y_n = 1) = 1/2.$$

Với $(X_n; n \in \mathbf{N}^*)$ là dãy biến ngẫu nhiên bất kì có kì vọng hữu hạn và độc lập với dãy $(Y_n; n \in \mathbf{N}^*)$. Đặt $\xi_n = X_n Y_n$, khi đó $(\xi_n; n \in \mathbf{N}^*)$ cũng là dãy các biến ngẫu hiệu m - unordered martingale.

4. Kết luận

Việc nghiên cứu Bất đẳng thức Berry - Essen bằng phương pháp Stein đã được nhiều tác giả nghiên cứu, đặc biệt là nhóm nghiên cứu của giáo sư Louis Chen (Đại học Quốc gia Singapore). Trong bài báo này chúng tôi đã thiết lập được một số kết quả về tốc độ hội tụ của định lí giới hạn trung tâm đối với dãy biến ngẫu nhiên nhiên hiệu unordered martingale bằng phương pháp Stein.

Tài liệu tham khảo

[1] Berry A.C. (1941), “The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates”, Trans. Amer. Math., 49, 122–136.

[2] Choi K. P. and Klass M. J. (1997), “Some best possible prophet inequalities for convex functions of sums of independent variates and unordered martingale difference sequences”, The Annals of Probability, 25, 2, 803–811.

[3] Chen H.Y.L, Goldstein L. and Qi-Man Shao (2011), “Normal approximation by Stein’s method”, Springer Press.

[4] Esseen C. G. (1942), “On the Liapunov limit of error in the theory of probability”, Ark. Mat. Astr. Fys., 28A, 1–19.

NORMAL APPROXIMATION FOR UNORDERED MARTINGALE DIFFERENCE SEQUENCES

Abstract: Of all the limit theorems of the probability theory, the central limit theorem plays an important role in statistical analysis and its application. However, statistical problems cannnot be solved with infinitely large sample sizes, so the problem of “normal approximation” helps to estimate the required sample size to apply central limit theorems. In 1970, Charler Stein introduced his startling technique for normal approximation which is now known as Stein's method. This paper establishes some results of normal approximation for sequences of unordered martingale difference random variables. The results are the extension of those of the independent random variables sequences.

Key Words: normal approximation; random variables; unordered martingale difference; Berry-Essen inequality; central limit theorem.