MÔĐUN GOLDIE *H*-NGUYÊN TỐ

H-PRIME GOLDIE MODULES

Huỳnh Thị Phấn, Trương Công Quỳnh

Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu khái niệm môđun con nguyên tố theo tính chất đồng cấu của các môđun; đặc biệt theo định nghĩa tích của các môđun con. Cho M là R-môđun phải và X < M là môđun con bất biến hoàn toàn của M. Khi đó, X được gọi là môđun con H-nguyên tố của M nếu mọi môđun con bất biến hoàn toàn I và U của M sao cho IU ≤ X thì suy ra I ≤ X hoặc U ≤ X. Một số đặc trưng của lớp môđun này và vành các tự đồng cấu của môđun H-nguyên tố đã được nghiên cứu.

Từ khóa: Môđun con H-nguyên tố; Môđun H-nguyên tố; Iđêan nguyên tố; Môđun con bất biến hoàn toàn.

ABSTRACT

In this paper we study the definition prime submodules by property homomorphism of modules; in particular, by definition of product submodules. Let M be a right R-module and X < M be a fully invariant submodule. X is called H-prime submodule of M if for all fully invariant submodules I and U of M such that IU ≤ X then I ≤ X or U ≤ X.

Key words: H-prime submodule; H-prime module; prime ideal; fully invariant submodule.

1. Mở đầu

Cùng với sự phát triển của toán học hiện đại nói chung, lý thuyết môđun được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu và đạt nhiều kết quả xuất sắc. Trong đó, môđun con nguyên tố đã xuất hiện nhiều trong các lĩnh vực đại số giao hoán. Nhiều nhà toán học đã nghiên cứu về lớp môđun trên như là C. P. Lu (1984), A.Gaur and A. Kumar Maloo (2008),.... Năm 2004, Lomp đưa ra khái niệm tích của hai môđun con. Trên cơ sở đó, các tác giả T. C. Quynh và A. Thu đã đưa ra khái niệm môđun con nguyên tố dựa vào tích của hai môđun con và gọi chúng là môđun con *H*-nguyên tố. Bài báo này sẽ tiếp tục nghiên cứu sâu hơn vấn đề trên. Mặt khác, trong những năm gần đây khái niệm môđun Goldie xuất hiện nhiều và các áp dụng của chúng vào các lớp vành và môđun cũng đã được nghiên cứu như chiều Goldie hữu hạn, chiều Goldie mạnh của một môđun.... Đồng thời, một vài năm gần đây, các tác giả R. L. McCasland and P.F. Smith, N. V. Sanh and N.V Vu đã nghiên cứu lớp môđun nguyên tố, nửa nguyên tố theo nghĩa khác với chiều Goldie hữu hạn. Các tác giả này đã thu được một số kết quả mới, đặc biệt là trong việc đưa ra kết quả về tính hữu hạn của các môđun con nguyên tố cực tiểu.

Trong bài báo này chúng tôi đưa ra các đặc trưng của lớp môđun H-nguyên tố và vành các tự đồng cấu của môđun H-nguyên tố. Hơn nữa, các đặc trưng của vành nửa đơn thông qua lớp môđun H-nguyên tố cũng đã nghiên cứu.

Trong toàn bộ bài báo, vành R được xét là vành kết hợp có phần tử đơn vị và tất cả các môđun xét trên vành R đều là $R-$ môđun phải unita. Chúng tôi cũng ký hiệu M_R để chỉ M là $R-$ môđun phải. Với N là môđun con của *M*, chúng tôi dùng các ký hiệu $A \leq M$ ($M < N$), $N \leq^{\oplus} M$ và $N \leq^{e} M$ để ký hiệu N là môđun con của M (tương ứng, môđun con thực sự), N là hạng tử trực tiếp của M và N là môđun con cốt yếu của *M*.

2. Một số kết quả về môđun Goldie *H*-nguyên tố.

Định nghĩa 2.1. Cho *M* là *R*-môđun phải và *X* < *M* là môđun con bất biến hoàn toàn của *M*. Khi đó, *X* được gọi là *môđun con H-nguyên tố* của *M* nếu mọi môđun con bất biến hoàn toàn

I và U của M sao cho $IU \le X$ thì suy ra $I \le X$ hoặc $U \le X$.

Định lý 2.2. *Cho M là R-môđun phải, $X \neq M$ là môđun con bất biến hoàn toàn của M và S là vành các tự đồng cấu của M. Khi đó,*

a. Nếu M là tự xạ ảnh và X là môđun con H-nguyên tố của M thì I_X là iđêan nguyên tố của S.

b. Ngược lại, nếu M là tự sinh và I_X là iđêan nguyên tố của S thì X là môđun con H-nguyên tố của M.

***Chứng minh**.*

a. Giả sử M là tự xạ ảnh, $X \neq M$ là môđun con H-nguyên tố của M, ta chứng minh I_X là iđêan nguyên tố của S. Vì $X \neq M$ nên $I_X \neq S$. Gọi J, K là các iđêan hai phía của S sao cho $JK \le I_X$. Khi đó, $JK(M) \le I_X(M) \le X$. Mặt khác, ta có $JK(M) = \sum_{f \in JK} f(M)$.

Giả sử J ’ I_X. Khi đó, tồn tại $h \in J$ sao cho $h \notin I_X$, suy ra $hK(M) \le X$. Tiếp theo ta chứng minh $h(M)K(M) \le X$. Thật vậy, với mọi $f \in Hom(M,h(M))$ thì tồn tại $u \in Hom(M,M)$ sao cho $f = hu$ (vì M là tự xạ ảnh). Khi đó, $f(K(M))=(hu)K(M) \le hK(M) \le X$. Vì vậy $h(M)K(M)= \sum_{f \in Hom(M,h(M))} f(K(M)) \le$ X. Vì X là môđun con H-nguyên tố của M nên suy ra $h(M) \le X$ hoặc $K(M) \le X$. Tuy nhiên, $h \notin I_X$ nên chúng ta phải có $K(M) \le X$ hay $K \le I_X$. Vậy I_X là iđêan nguyên tố của S.

b. Giả sử M là tự sinh và I_X là iđêan nguyên tố của S, ta chứng minh X là môđun con H-nguyên tố của M. Với mọi $\varphi \in S$, U là môđun con bất biến hoàn toàn của M sao cho $S\varphi(M).U \le X$. Giả sử $\varphi(M)$ ’ X.

Ta cần chứng minh $U \le X$. Thật vậy, vì $\varphi(M)$ ’ X nên $\varphi \notin I_X$. Do M tự sinh nên U = $\sum_{f \in I} f(M)$ cho tập con $I \subset S$. Suy ra, $f(M) \le U$ với mọi $f \in I$. Khi đó, vì U là môđun con bất biến hoàn toàn của M nên $U = S(U) = \sum_{f \in I} Sf(M)$.

Suy ra $\varphi(U) = \varphi(\sum_{f \in I} Sf(M)) = \sum_{f \in I} \varphi Sf(M)$.

Vì $\varphi(U) \le X$ nên $\varphi Sf \subset I_X$ với mọi f $\in I$. Vì $\varphi \notin I_X$ nên $f \in I_X$ (do I_X là iđêan nguyên tố của S). Suy ra $f(M) \le X$ với mọi $f \in I$ hay $U \le X$. Vậy X là môđun con H-nguyên tố của M.

Định nghĩa 2.3. Một R-môđun phải M được gọi là *môđun H-nguyên tố* nếu 0 là môđun con H-nguyên tố của M.

Rõ ràng, một vành R được gọi là vành nguyên tố nếu R_R là môđun H-nguyên tố.

Định lý 2.4. *Cho M là R-môđun phải và S là vành các tự đồng cấu của M. Khi đó,*

a. Nếu M là môđun H-nguyên tố và M tự xạ ảnh thì S là vành nguyên tố.

b. Nếu M là tự sinh và S là vành nguyên tố thì M là môđun H-nguyên tố.

***Chứng minh**. a.* Do M là môđun H-nguyên tố nên 0 là môđun con H-nguyên tố của M. Khi đó, tập $I_0 = 0$ là iđêan nguyên tố của S. Vậy S là vành nguyên tố.

b. Do S là vành nguyên tố nên 0 là iđêan nguyên tố của S. Theo Định lý 2.2 suy ra $I_0 = 0$ là môđun con H-nguyên tố của M. Vậy M là môđun H-nguyên tố.

Định nghĩa 2.5. Cho M là R-môđun phải, một môđun con bất biến hoàn toàn X của M được gọi là *môđun con nửa H-nguyên tố* nếu nó là giao của một họ nào đó các môđun con H-nguyên tố của M.

Một R-môđun phải M được gọi là *môđun nửa H-nguyên tố* nếu 0 là một môđun con nửa H-nguyên tố của M. Bởi vậy, vành R là một vành nửa nguyên tố nếu R_R là môđun nửa H-nguyên tố.

Hệ quả 2.6. *Cho M là R-môđun phải, tự xạ ảnh, nửa H-nguyên tố và S là vành các tự đồng cấu của M. Khi đó, S là vành nửa nguyên tố.*

Định lý 2.7. *Cho M là R-môđun phải, tự xạ ảnh, hữu hạn sinh, tự sinh và S là vành các tự* *đồng cấu của M. Khi đó, nếu S là một vành nửa nguyên tố thì M là môđun nửa H-nguyên tố.*

Chứng minh. Trước hết chúng ta giả sử I là một iđêan nguyên tố của S và đặt $X = I(M)$. Theo giả thiết M tự xạ ảnh và hữu hạn sinh nên $I = Hom(M, I(M))$. Từ đây chúng ta suy ra $I_X = I$. Tiếp theo chúng ta sẽ chứng minh X là một môđun con H-nguyên tố của M. Thật vậy, lấy $\varphi \in S$ và U là một môđun con bất biến hoàn toàn của M sao cho $[S\varphi(M)](U) \leq X$ nhưng $\varphi(M)$ ’ X. Khi đó, $\varphi(U) \subset X$ và $\varphi \notin I$. Vì M là môđun tự sinh nên $U = \sum_{f \in J} f(M)$ với $J \subset S$ nào đó. Khi đó, $U = S(U) = \sum_{f \in J} Sf(M)$.

Suy ra $\varphi(U) = \varphi(\sum_{f \in J} Sf(M)) = \sum_{f \in J} \varphi Sf(M)$.

Vì $\varphi(U) \leq X$ nên $\varphi Sf(M) \leq X = I(M)$ với mọi $f \in J$. Suy ra $\varphi Sf \subset I$. Vì $\varphi \notin I$ nên $f \in I$ (vì I là iđêan nguyên tố của S). Khi đó, $f(M) \leq I(M) = X$ với mọi $f \in J$. Suy ra $U \leq X$. Vậy X là môđun con H-nguyên tố của M. Theo Định lý 2.2 ta được I_X là iđêan nguyên tố của S.

Giả sử S là vành nửa nguyên tố. Khi đó, 0 là môđun con nửa H-nguyên tố hay $0 = \bigcap_{I \in \mathrm{F}} I$ và F là một họ các iđêan nguyên tố nào đó của S. Với mỗi $I \in \mathrm{F}$, đặt $X=I(M)$. Khi đó, theo chứng minh trên ta được $I_X = I$ và X là môđun con H-nguyên tố của M. Vì M là tự sinh nên chúng ta chứng minh được $0 = \bigcap X$. Vậy M là môđun nửa H-nguyên tố.

Bổ đề 2.8 ([5, Proposition 3.7]). *Cho M là R-môđun phải và S là vành các tự đồng cấu của M. Khi đó, nếu M thỏa mãn điều kiện ACC (tương ứng DCC) trên M-linh hóa tử thì S thỏa mãn điều kiện ACC (tương ứng DCC) trên linh hóa tử phải.*

Định lý 2.9. *Cho M là R-môđun phải H-nguyên tố, tự xạ ảnh, hữu hạn sinh, tự sinh thỏa mãn điều kiện ACC và DCC trên M-linh hóa tử. S là vành các tự đồng cấu của M. Khi đó, với mọi môđun con bất biến hoàn toàn $X \neq 0$ của M và với mọi $f \in S$ thì tập $f + I_X$ chứa phần tử chính quy của S.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh I_X là iđêan phải cốt yếu của S. Thật vậy, vì X là môđun con bất biến hoàn toàn của M nên I_X là iđêan hai phía của S và vì $X \neq 0$, M tự sinh nên $I_X \neq 0$. Lấy J là một iđêan phải của S sao cho $I_X \cap J = 0$. Khi đó, $JI_X \subset I_X \cap J = 0$. Suy ra $JI_X = 0$. Do M là môđun H-nguyên tố nên theo Định lý 2.4 thì S là vành nguyên tố và 0 là iđêan nguyên tố của S. Do đó $J = 0$. Điều này chỉ ra rằng I_X là một iđêan phải cốt yếu của S. Mặt khác, M thỏa mãn điều kiện ACC và DCC trên M-linh hóa tử, theo Bổ đề 2.8 chỉ ra rằng S thỏa mãn điều kiện ACC và DCC trên các linh hóa tử phải. Theo [1, Lemma 1.18] suy ra tập $f + I_X$ chứa phần tử chính quy của S.

Định lý 2.10. *Cho M là R-môđun phải nửa H-nguyên tố, tự xạ ảnh, hữu hạn sinh, tự sinh thỏa mãn điều kiện ACC và DCC trên M-linh hóa tử. S là vành các tự đồng cấu của M. Khi đó, với mọi môđun con cốt yếu X của M và với mọi $f \in S$ thì tập $f + I_X$ chứa phần tử chính quy của S.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh I_X là iđêan phải cốt yếu của S. Thật vậy, do M là tự sinh và $X \neq 0$ nên ta được $I_X \neq 0$. Giả sử J là iđêan của S sao cho $I_X \cap J = 0$. Khi đó, $I_X = Hom(M, I_X(M)) = Hom(M, X)$ và $J = Hom(M, J(M))$. Do đó: $0 = I_X \cap J = Hom(M, X) \cap Hom(M, X \cap J(M)) = Hom(M, X \cap J(M))$. Suy ra $X \cap J(M) = 0$, vì X là môđun con cốt yếu của M nên $J(M) = 0$. Suy ra J = 0. Do vậy I_X là iđêan phải cốt yếu của S. Mặt khác, vì M là môđun nửa H-nguyên tố nên theo Hệ quả 2.6 ta được S là vành nửa nguyên tố. Vì M thỏa mãn điều kiện ACC và DCC trên M-linh hóa tử nên theo Bổ đề 2.8 chỉ ra rằng S thỏa mãn điều kiện ACC và

DCC trên linh hóa tử phải. Cuối cùng theo [1, Lemma 1.19] suy ra $f + I_X$ chứa phần tử chính quy của *S*.

Định lý 2.11. *Cho M là R-môđun tự xạ ảnh, hữu hạn sinh, tự sinh và S là vành các tự đồng cấu của M. Khi đó, nếu M là môđun Goldie H-nguyên tố thì mọi đơn cấu $f \in S$ đều chính quy.*

Chứng minh. Theo giả thiết ta được *S* là vành Goldie phải. Khi đó, *S* có chiều Goldie hữu hạn và thỏa mãn điều kiện ACC trên linh hóa tử phải. Theo [1, Theorem 1.6] thì $Z(S_S)$ thì lũy linh. Vì *S* là vành nửa nguyên tố nên $Z(S_S) = 0$. Do đó, *S* là vành không suy biến phải. Cuối cùng, theo [1, Lemma 1.12] suy ra mọi phần tử chính quy phải của *S* đều chính quy.

Bổ đề 2.12 ([2, Theorem 3.1]). *Cho M là R-môđun phải, tự xạ ảnh, hữu hạn sinh, tự sinh và S là vành các tự đồng cấu của M. Khi đó, nếu M là môđun Goldie thì S là vành Goldie phải.*

Định lý 2.13. *Cho M là R-môđun phải Goldie nửa H-nguyên tố, tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh. S là vành các tự đồng cấu của M. Khi đó, với mọi môđun con cốt yếu X của M và với mọi $f \in S$ thì tập $f + I_X$ chứa phần tử chính quy của S.*

Chứng minh. Trước hết ta được I_X là iđêan phải cốt yếu của *S*. Mặt khác, vì *M* là môđun Godie nửa *H*-nguyên tố nên theo Hệ quả 2.6 và Bổ đề 2.11 ta được *S* là vành Goldie phải nửa nguyên tố. Cuối cùng theo [1, Corollary 1.20] suy ra tập $f + I_X$ chứa phần tử chính quy của *S*.

Định lý 2.14. *Cho M là R-môđun phải tự xạ ảnh, hữu hạn sinh, tự sinh và S là vành các tự đồng cấu của M. Giả sử rằng M là môđun Goldie nửa H-nguyên tố và X là môđun con của M. Khi đó, X là môđun con cốt yếu của M khi và chỉ khi I_X chứa phần tử chính quy của S.*

Chứng minh. Trước hết ta được I_X là iđêan phải cốt yếu của *S*. Vì *M* là môđun Godie nửa *H*-nguyên tố nên theo Hệ quả 2.6 và Bổ đề 2.11 ta được *S* là vành Goldie phải nửa nguyên tố. Theo [1, Theorem 1.10] suy ra I_X chứa phần tử chính quy của *S*.

Ngược lại, giả sử I_X chứa phần tử chính quy *f* của *S*. Vì *M* tự sinh nên *f* phải đơn cấu. Ta sẽ chứng minh *f (M)* cốt yếu trong *M*. Thật vậy, giả sử *f(M)* không phải là môđun con cốt yếu của *M*. Khi đó, tồn tại một môđun con *N* khác không của *M* sao cho $f(M) \cap N = 0$. Vì *f* là đơn cấu, $N \neq 0$ nên $f(N) \neq 0$. Do đó $N + f(N)$ là một tổng trực của *M*. Bằng quy nạp ta được $N + f(N) + f^2(N) + ... + f^n(N)$ là tổng trực tiếp với mọi *n*. Điều này mâu thuẫn với *M* có chiều Goldie hữu hạn. Vậy *f*(*M*) là môđun con cốt yếu của *M*. Tiếp theo, xét iđêan phải *f S* của *S* và giả sử *J* là iđêan phải của *S* sao cho $fS \cap J = 0$. Khi đó, ta có $0 = fS \cap J = Hom(M, fS(M)) \cap Hom(M, J(M)) = Hom(M, f(M) \cap J(M))$. Vì *M* tự sinh nên $f(M) \cap J(M) = 0$. Suy ra $J(M) = 0$ hay $J = 0$. Điều này chỉ ra rằng *f S* là iđêan phải cốt yếu của *S* và do đó I_X cốt yếu trong *S* như là một iđêan phải. Giả sử *Y* là một môđun con của *M* và $X \cap Y = 0$. Khi đó, $IY \cap I_Y = I_0 = 0$. Điều này kéo theo $I_Y = 0$ và từ đó $Y = 0$ vì *M* là tự sinh. Vậy *X* là môđun con cốt yếu của *M*.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. W. Chatters, C. R. Hajarnavis (1980), *Rings With Chain Conditions*, Pitman Advanced Publishing Program.

[2] A. Gaur and A. Kumar Maloo (2008), "Minimal prime submodules", *Int. J. Algebra* 2(20), 953-956.

[3] C. Lomp (2004), Prime element in partially ordered groupoids applied to modules and Hopf algebra actions, J. Algebra Appl, 4(1), 77-97.

[4] C. P. Lu (1984), *Prime submodules of modules*, Comment. Mat. Univ. St. Pal. 33(1), 61-69.

[5] N. V. Sanh, S. Asawasamrit (2010), K. F. U. Ahmed and L. P. Thao, "On prime and

semiprime Goldie modules", *Asian-European Journal of Mathematics*, 4, 1-14.
[6] T.C.Quynh, A.Thu, "On H-prime submodules", *preprint.*