VỀ MÔĐUN SOC - PHẦN PHỤ

*Trương Công Quỳnh**

TÓM TẮT

Cho *A, B* là các môđun con của môđun *M*. Môđun con *A* được gọi là *phần phụ của B* trong *M* nếu *M=A+B* và $A\cap B \ll A$. Môđun *M* được gọi là phần phụ nếu mỗi môđun con của *M* đều có phần phụ trong *M.* Lớp các môđun này đã được nghiên cứu trong các năm gần đây. Đặc biệt người ta nghiên cứu đặc trưng của lớp vành và môđun nửa hoàn chỉnh và hoàn chỉnh thông qua lớp môđun phần phụ. Năm 2004, Wang và Ding đã đưa ra một trường hợp tổng quát của môđun phần phụ đó là môđun tổng quát phần phụ và nghiên cứu chúng. Theo đó, một môđun *M* được gọi là *phần phụ tổng quát* nếu cho mỗi môđun *A* của *M* thì tồn tại môđun con *B* của *M* sao cho *M=A+B* và $A\cap B \le Jac(A)$. Trong bài báo này chúng tôi đưa ra khái niệm soc-phần phụ và áp dụng của chúng trong một số lớp vành và môđun đã biết.

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, vành R đã cho luôn được giả thiết là vành kết hợp có đơn vị $1\neq 0$ và mọi R-môđun được xét là môđun unita. Trong mục này, chúng tôi giới thiệu những khái niệm cơ bản được sử dụng trong bài báo. Một số khái niệm khác liên quan đến bài báo chúng ta có thể tham khảo trong Nicholson và Yousif [5], Wisbauer ([7]). Với vành *R* đã cho, ta viết M_R (tương ứng, ${}_RM$) để chỉ M là một R-môđun phải (t.ư, trái). Trong một ngữ cảnh cụ thể của bài báo, khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, để đơn giản ta viết môđun *M* thay vì M_R. Chúng ta dùng các ký hiệu $A\le M$ $(A<M)$ để chỉ A là môđun con (t.ư., thực sự) của M. Cho M và N là các R-môđun phải. Đồng cấu từ *M* đến *N* ; ký hiệu $M\to N$ được hiểu là *R*-đồng cấu từ *M* đến *N*. Ký hiệu End (*M*) là tập tất cả các đồng cấu từ *M* đến *M* (hay còn được gọi là tập tất cả các đồng cấu của *M*). Cho *M* là một *R*-môđun phải và tập *X* là tập khác rỗng của *M*. Linh hóa tử phải của X trong R được ký hiệu là $r_R(X)$ và được xác định như sau:

$$r_R(X)=\{r\in R \mid xr=0, \forall x\in X\}.$$

Khi không sợ nhầm lẫn ta có thể viết gọn là *r(X)* thay vì $r_R(X)$. Khi $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ thì ta viết $r(x_1,x_2,...,x_n)$ thay vì $r(\{x_1,x_2,...,x_n\})$. Ta có $r_R(X)$ là một iđêan phải của vành *R*. Trong suốt bài báo này chúng ta ký hiệu *U(R)* là tập tất cả các phần tử khả nghịch của *R*.

Một vài năm gần đây, hướng nghiên cứu mở rộng của các môđun xạ ảnh và môđun phần phụ đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Đặc biệt hướng nghiên cứu thông qua môđun phần phụ đã có nhiều kết quả áp dụng đến lý thuyết của các vành cổ điển. Như chúng ta được biết một vành *R* là nửa hoàn chỉnh nếu R_R là môđun phần phụ hoặc tương đương mọi môđun đơn có phủ xạ ảnh. Một vành *R* là hoàn chỉnh phải nếu mọi môđun phải đều có phủ xạ ảnh. Từ các kết quả này đã có nhiều tác giả nghiên cứu vành và môđun thông qua phủ xạ ảnh. Năm 2008, Nicholson và nhóm nghiên cứu của mình đã tổng quát khái niệm phủ xạ ảnh và đã đưa ra khái niện I-phủ xạ ảnh và từ đó các tác giả đã thu được một số kết quả đặc trưng cho lớp vành và môđun [1].

Năm 2000, Zhou đã xét lớp các môđun con suy biến và tác giả đã đưa ra khái niệm môđun con δ-bé ([9]). Một số đặc trưng và tính chất của lớp môđun con này đã nghiên cứu một cách đầy đủ. Đặc biệt, tác giả đã đưa khái niệm vành δ-nửa hoàn chỉnh và δ-hoàn chỉnh và nghiên cứu chúng thông qua δ-phủ xạ ảnh. Tiếp tục hướng nghiên cứu của Zhou, tác giả Kosan đã xây dựng khái niệm δ-phần phụ [4]. Các đặc trưng của lớp môđun δ-phần phụ đã được nghiên cứu và các đặc trưng của vành δ-nửa hoàn chỉnh và δ-hoàn chỉnh thông qua lớp môđun δ-phần phụ cũng đã được đưa ra.

Năm 2004, Wang và Ding đã đưa ra một trường hợp tổng quát của môđun phần phụ đó là môđun phần phụ tổng quát ([6]). Theo đó một môđun M được gọi là *phần phụ tổng quát* nếu cho mỗi môđun A của M thì tồn tại môđun con B của M sao cho $M=A+B$ và $A\cap B\leq Jac(A)$. Các đặc trưng của lớp vành và môđun thông qua lớp môđun phần phụ tổng quát với điều kiện dây chuyền đã được đưa ra.

Như vậy các mở rộng của môđun phần phụ đã được quan tâm nghiên cứu và mở rộng. Vì vậy cũng theo hướng nghiên cứu trên chúng tôi đưa ra khái niệm soc-phần phụ và nghiên cứu chúng. Trước hết chúng tôi chứng minh được rằng một môđun M là soc-phần phụ nếu và chỉ nếu *M/Soc(M)* là môđun nửa đơn (Bổ đề 2.2). Từ đó chúng tôi thu được một kết quả là một môđun soc-phần phụ là môđun có đế cốt yếu (Định lý 2.4). Một số đặc trưng của lớp vành tựa Frobenius thông qua điều kiện soc-phần phụ và các mở rộng của vành nội xạ cũng đã được xét đến (Định lý 2.5, Định lý 2.11). Ngoài ra một số tính chất khác của môđun soc-phần phụ cũng được xét đến.

2. Môđun soc-phần phụ

Định nghĩa 2.1. Cho M là một R-môđun phải và A, B là môđun con của M. Môđun con A được gọi là *soc-phần phụ* của B trong M nếu $M=A+B$ và $A\cap B\leq Soc(A)$. Môđun M được gọi là soc-phần phụ nếu mỗi môđun đều là soc-phần phụ trong M.

Bổ đề 2.2. *Cho M là một mô đun. Khi đó M là môđun soc-phần phụ nếu và chỉ nếu M/Soc(M) là môđun nửa đơn.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Cho A là môđun con của M với $Soc(M)\leq A$. Khi đó tồn tại môđun con B của M sao cho $M=A+B$ và $A\cap B\leq Soc(A)$. Suy ra

$$M/Soc(M)=A/Soc(M)+(B+Soc(M))/Soc(M).$$

Mặt khác, $A\cap(B+Soc(M))=Soc(M)+(A\cap B)\leq Soc(M)$. Từ đó suy ra

$$A\cap(B+Soc(M))=Soc(M).$$

Vì vậy $M/Soc(M) = A/Soc(M) \oplus (B + Soc(M))/Soc(M)$.

Điều này chứng tỏ *M/Soc(M)* là môđun nửa đơn.

($\Leftarrow$) Giả sử *M/Soc(M)* là môđun nửa đơn. Lấy *A* là môđun con của *M*. Khi đó tồn tại môđun con *B* của *M* sao cho $M/Soc(M) = (A + Soc(M))/Soc(M) \oplus B/Soc(M)$.

Ta có $M=A+B$ và

$$Soc(M) = (A + Soc(M)) \cap B = (A + Soc(M)) \cap B = Soc(M) + (A \cap B).$$

Suy ra $A \cap B \leq Soc(M)$. Từ đó ta có $A \cap B = (A \cap B) \cap A \leq Soc(M) \cap A = Soc(A)$. Vậy *M* là môđun soc-phần phụ.

Từ bổ đề chúng ta có tính chất đối xứng của soc-phần phụ.

Hệ quả 2.3. *Cho M là mô đun. Khi đó các điều kiện sau là tương đương :*

(1) A là *soc-phần phụ* của *B* trong *M.*

(2) M=A+B và $A \cap B \leq Soc(M)$.

Nhận xét. Theo Bổ đề 2.3, ta có nếu *A* là soc-phần phụ của *B* trong *M,* thì *B* là soc-phần phụ của *A* trong *M.* Vì vậy soc-phần phụ của các môđun con có tính chất đối xứng.

Từ bổ đề trên chúng ta có kết quả sau :

Định lý 2.4. *Giả sử M là môđun soc-phần phụ. Khi đó Soc(M) cốt yếu trong M.*

Chứng minh. Gọi *A* là phần bù cộng tính của *Soc(M)* trong *M.* Suy ra $A \oplus Soc(M)$ cốt yếu trong *M.* Mặt khác, chúng ta có $A \cong [A \oplus Soc(M)]/Soc(M) \leq M/Soc(M)$ và *M/Soc(M)* là nửa đơn theo Bổ đề 2.2. Vì vậy *A* là môđun con nửa đơn của *M* hay $A \leq Soc(M)$ và từ đó suy ra *A=0.* Vậy *Soc(M)* cốt yếu trong *M.*

Tiếp theo chúng ta có một đặc trưng của vành tựa Frobenius thông qua môđun soc-phần phụ.

Định lý 2.5. *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho :*

(1) R là vành tựa Frobenius.

(2) R_R *là nội xạ và soc-phần phụ.*

Chứng minh. $(1) \Rightarrow (2)$ rõ ràng.

$(2) \Rightarrow (1)$. Vì R_R là soc-phần phụ nên $R/Soc(R_R)$ là môđun nửa đơn. Suy ra $R/Soc(R_R)$ là môđun Nœte và vì vậy *R* thỏa điều kiện ACC trên các iđêan phải cốt yếu theo [3, Corollary 18.7]. Vậy *R* là vành tựa Frobenius theo [3, Corollary 18.13].

Định lý 2.6. *Cho M là môđun hữu hạn sinh soc-phần phụ với Soc(M) hữu hạn sinh.*

Khi đó M có độ dài hữu hạn.

Chứng minh. Vì M là soc-phần phụ nên *M/Soc(M)* là môđun nửa đơn. Hơn nữa, M là môđun hữu hạn sinh nên *M/Soc(M)* là môđun Artin và Nơte. Mặt khác, theo giả thiết ta có *Soc(M)* là môđun hữu hạn sinh. Từ đó chúng ta suy ra *Soc(M)* là môđun Artin và Nơte. Khi đó chúng ta suy ra M là môđun Artin và Nơte. Vậy M có độ dài hữu hạn.

Bổ đề 2.7. Cho $f: M \to N$ là một đồng cấu và L là soc-phần phụ trong M sao cho $Kerf \leq L$. Khi đó *f(L)* là soc-phần phụ trong *f(M)*.

Chứng minh. Giả sử L là soc-phần phụ của K trong M. Suy ra $M=L+K$ và $L \cap K \leq Soc(M)$. Do đó $f(M)=f(L)+f(K)$. Mặt khác, $Kerf \leq L$ nên $f(L \cap K) = f(L) \cap f(K)$. Từ đó suy ra $f(L) \cap f(K) \leq f(Soc(M)) \leq Soc(f(M))$. Điều này chứng tỏ *f(L)* là soc-phần phụ của *f(K)* trong *f(M)*.

Bổ đề 2.8. *Mỗi ảnh toàn cấu của một môđun soc-phần phụ là soc-phần phụ.*

Chứng minh. Giả sử $f: M \to N$ là một toàn cấu và K là môđun con của N. Vì M là soc-phần phụ nên K là soc-phần phụ trong M. Khi đó theo Bổ đề 2.7, ta có $K = f(f^{-1}(K))$ là soc-phần phụ của $f(M)=N$. Vậy N là soc-phần phụ.

Định lý 2.9. *Nếu M là môđun soc-phần phụ thì M là môđun nửa Artin.*

Chứng minh. Như chúng ta được biết một môđun là nửa Artin nếu mỗi mô đun thương khác không của M có đế cốt yếu. Giả sử M là môđun soc-phần phụ và *M/A* là thương khác không của M. Theo Bổ đề 2.8, *M/A* là mô đun soc-phần phụ. Suy ra *Soc(M/A)* cốt yếu trong *M/A* theo Định lý 2.4. Vậy M là mô đun nửa Artin.

Tiếp theo chúng ta xét tính chất soc-phần phụ môđun thương của môđun soc-phần phụ.

Bổ đề 2.10. *(1) Cho A là soc-phần phụ trong M và* $K \leq A$. *Khi đó* A/K *là soc-phần phụ trong M/K.*

(2) Cho $A, B \leq M$ *với A là soc-phần phụ. Nếu A+B là soc-phần phụ trong M thì B là soc-phần phụ trong M*

Chứng minh. (1). Cho B là môđun con của M sao cho $M=A+B$ và $A \cap B \leq Soc(M)$. Khi đó $M/K = A/K + (B+K)/K$ và $A \cap (B+K) = K + A \cap B \leq L + Soc(M)$. Từ đó suy ra

$$(A/K) \cap (B+K)/K = (K + A \cap B)/K \leq (K + Soc(M))/K \leq Soc(M/K).$$

Vậy A/K là soc-phần phụ của *(B+K)/L* trong *M/K*.

(2). Theo giả thiết tồn tại X là môđun con của M sao cho $M=A+B+X$ *và* $(A+B) \cap X \leq Soc(M)$. Vì $(X+B) \cap A \leq A$ nên tồn tại $Y \leq A$ sao cho

$A = (X + B) \cap A + Y$ *và* $(X + B) \cap Y \le Soc(A)$. Khi đó

$$M = A + B + X = [(X + B) \cap A] + B + Y = B + X + Y .$$

Tiếp theo chúng ta sẽ chứng minh $(X + Y) \cap B \le Soc(M)$. Vì $Y + B \le A + B$ nên $X \cap (Y + B) \le X \cap (A + B) \le Soc(M)$. Vì vậy

$$(X + Y) \cap B \le (X + B) \cap Y + X \cap (Y + B) \le Soc(M).$$

Vậy $X+Y$ là soc-phần phụ của B trong M.

Mệnh đề 2.11. *Một tổng hữu hạn của các môđun soc-phần phụ là soc-phần phụ.*

Chứng minh. Chúng ta chỉ cần chứng minh $M = A + B$ là soc-phần phụ với *A, B* là soc-phần phụ. Cho $L \le M$. Từ đây suy ra *M*=*A*+*B*+*L* là soc-phần phụ của *0* trong *M*. Suy ra *B*+*L* có soc-phần phụ trong *M* theo Bổ đề 2.10. Lại theo Bổ đề 2.10, chúng ta cũng có *L* có soc-phần phụ trong *M*. Vậy *M* là soc-phần phụ.

Tiếp theo chúng ta có một đặc trưng của vành thông qua vành ef-mở rộng.

Một môđun *M* được gọi là ef-mở rộng nếu mỗi môđun con đóng của *M* chứa một môđun con cốt yếu hữu hạn sinh là hạng tử trực tiếp của *M*. Một vành *R* được gọi là ef-mở rộng phải nếu R_R là môđun ef-mở rộng.

Định lý 2.12. *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho:*

(1) R là vành tựa Frobenius.

(2) $(R \oplus R)_R$ *là ef-mở rộng,* R_R *là soc-phần phụ và I-hữu hạn.*

Chứng minh. $(1) \Rightarrow (2)$ Rõ ràng.

$(2) \Rightarrow (1)$ Vì *R* là I-hữu hạn nên *R* không chứa tập vô hạn các phần tử lũy đẳng trực giao. Suy ra $R = e_1R \oplus e_2R \oplus ... \oplus e_nR$ với e_i là các lũy đẳng nguyên thủy trực giao. Mặt khác, R_R là soc-phần phụ nên theo Định lý 2.4, *Soc*(R_R) cốt yếu trong R_R. Cho mỗi *i=1,2,...,n.* Ta có e_iR cũng là môđun ef-mở rộng và do đó e_iR là đều. Mặt khác, *Soc*(R_R) cốt yếu trong R_R nên suy ra mỗi e_iR là các môđun có đế đơn và vì vậy *Soc*(R_R) là môđun hữu hạn sinh. Theo Định lý 2.6, *R* là vành Artin phải. Từ đó suy ra $(R \oplus R)_R$ là môđun mở rộng. Do đó *R* là vành tự nội xạ phải hay *R* là vành tựa Frobenius theo Định lý 2.5.

Như chúng ta được biết một vành *R* là *I*-nửa hoàn chỉnh (với *I* là iđêan của vành *R*) nếu *R/I* là nửa đơn và mỗi phần tử lũy đẳng nâng được modulo *I*. Từ đây theo [5, Lemma 1.2] chúng ta có:

Mệnh đề 2.13. *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho:*

(1) R là vành Soc(R_R)*-nửa hoàn chỉnh.*

(2) R_R *là soc-phần phụ.*

Tiếp theo chúng ta có các ví dụ phân biệt vành nửa hoàn chỉnh và vành với điều kiện R_R là soc-phần phụ.

Ví dụ 2.14. *i)* Xét $Q=\prod_{i=1}^{+\infty} F_i$ với $F_i=Z_2$. Gọi R là vành con của Q sinh bởi 1_Q và $\oplus_{i=1}^{\infty} F_i$. Khi đó R_R là là soc-phần phụ. Tuy nhiên vành đã cho là vành nửa hoàn chỉnh.

ii) Xét vành

$$R=\left\{\begin{pmatrix} k & x \\ 0 & k \end{pmatrix} : k, x \in Z_4\right\}.$$

Khi đó R_R không là soc-phần phụ. Tuy nhiên vành đã cho là vành nửa hoàn chỉnh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. Alkan, W.K. Nicholson and A. C. Ozcan, A generalization of projective covers, Journal of Algebra, 319 (2008), 4947–4960.

[2] F.W. Anderson and K.R. Fuller, Rings and categories of modules, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1974.

[3] N. V. Dung, D. V. Huynh, P. F. Smith, and R. Wisbauer, Extending Modules, Pitman Research Notes Vol. 313. Longman, Harlow, New York, 1994.

[4] M. T. Kosan, δ−lifting and δ−supplemented modules, Algebra Colloquium 14 (2007), 53-60.

ON SOC - SUPPLEMENTED MODULES

Truong Cong Quynh

The University of Danang – University of Science and Education

ABSTRACT

Let *A, B* be submodules of module *M* . Submodule *A* is said to be a *supplement of B* in *M* nếu *M=A+B* and $A \cap B \ll A$. Module *M* is called *supplemented* if for each submodule *A* of *M,* there exists a submodule *B* of *M* such that A is supplement of *B* in *M.* These classes are studied in recently years. In particular, some characterizations of perfect and semiperfect ring via supplemented modules. In 2004, Wang and Ding gave a generalization of supplemented module and research them. Following which, a module *M* is called generalized supplemented if for each submodule *A* of *M,* there exists a submodule *B* of *M* such that *M=A+B* and $A \cap B \leq Jac(A)$. In this paper, we consider a generalization of supplemented module, that is soc-supplemented modules and some applications in classes well-known rings.

---

* TS. Trương Công Quỳnh - Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng.