# TÍCH CHẬP SUY RỘNG LIÊN KẾT VỚI BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN DẠNG FOURUER VÀ ỨNG DỤNG

## GENERALIZED CONVOLUTIONS ASSOCIATED WIHT THE INTEGRAL TRANSFORMS OF FOURIER TYPE AND THE APPLICATIONS

***Bùi Thị Giang***
*Học viện Kỹ thuật Mật mã*

***Phan Đức Tuấn***
*Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng*

**TÓM TẮT**

Bài báo này đưa ra một số tích chập mới liên kết với biến đổi tích phân dạng Fourier cùng với hàm trọng Hermite và xem xét một số ứng dụng của chúng. Đặc biệt, bài báo thu được điều kiện cần và đủ cho tính giải được của phương trình tích phân dạng chập và đưa ra công thức nghiệm hiển trong $L_1(\mathbb{R})$ cho phương trình đã đưa ra.

**Từ khóa:** tích chập; tích chấp suy rộng; biến đổi tích phân; biến đổi Fourier; phương trình tích phân.

**ABSTRACT**

This paper provides new generalized convolutions associated with the integral transforms of Fourier type with Hermite weight - function and considers their applications. In particular, the necessary and sufficient condition for solvability of the integral equations of convolution type is obtained and the solutions in explicit form in $L_1(\mathbb{R})$ of the equations are given.

**Key words:** convolution; generalized convolution; integral transforms; Fourier transforms; integral equation

## 1. Mở đầu

Việc sử dụng các biến đổi tích phân để giải các phương trình vi tích phân ra đời rất sớm và liên tục phát triển cho đến ngày nay. Có vai trò đặc biệt quan trọng trong lý thuyết này phải kể đến các biến đổi tích phân Fourier, Hartley. Cùng với lý thuyết phép biến đổi tích phân, lý thuyết tích chập liên kết với các biến đổi tích phân cũng xuất hiện vào khoảng đầu thế kỷ XX. Những năm gần đây có khá nhiều bài báo về biến đổi tích phân và tích chập liên kết với biến đổi tích phân được công bố [4, 6, 7, 8].

Biến đổi tích phân Fourier, Fourier ngược và Hartley lần lượt được xác định bởi:

$$(Ff)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy,$$

$$(F^{-1}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{ixy} dy,$$

$$(H_1 f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \operatorname{cas}(xy) dy,$$

$$(H_2 f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \operatorname{cas}(-xy) dy.$$

Đây là các biến đổi tích phân có nhiều ứng dụng trong khoa học và kỹ thuật (xem [1, 2, 3]). Theo quan sát của chúng tôi thì biến đổi Fourier, Fourier ngược và các biến đổi Hartley là các tổ hợp tuyến tính của hai biến đổi $T_c, T_s$ như sau:

$$F = T_c - iT_s,\ F^{-1} = T_c + iT_s,$$
$$H_1 = T_c + T_s,\ H_2 = T_c - T_s,$$

trong đó $T_c, T_s$ xác định bởi

$$(T_c f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \cos xy dy,$$

$$(T_s f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \sin xy dy.$$

Điều này đã đưa đến cho chúng tôi ý tưởng xét biến đổi tích phân mới

$$(Tf)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y)[\cos xy + 2\sin xy] dy, \quad \textit{(0.1)}$$

gọi là biến đổi tích phân dạng Fourier. Điều kiện để tích phân (0.1) tồn tại là hàm $f \in L_1(\mathbb{R})$. Do đó, trong bài báo này chúng tôi luôn xét các hàm trong không gian $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Bài báo được chia làm bốn phần. Phần 2 là nội dung chính của bài báo. Phần này chỉ ra biến đổi ngược của $T$ và xây dựng tám tích chập suy rộng mới liên kết với các biến đổi $T, T^{-1}$. Phần 3 là ứng dụng các tích chập xây dựng được ở Phần 2 vào giải phương trình tích phân dạng chập với nhân Gaussian. Đặc biệt, Định lý 4 thu được điều kiện cần và đủ để phương trình đang xét có nghiệm và đưa ra công thức nghiệm tường minh.

## 2. Tích chập suy rộng

Hàm Hermite được định nghĩa bởi

$$\phi_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx} e^{-x^2}, \ (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Định lý sau sẽ chỉ cho ta các hàm Hermite là hàm riêng của biến đổi $T$ ứng với các trị riêng $\pm 1, \pm 2$.

**Định lý 1.** *Cho* $n \equiv r \pmod 4$, *khi đó*

$$(T\phi_n)(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{r}{2}}\phi_n & khi \ \ r \in \{0,2\} \\ (-1)^{\frac{r-1}{2}} 2\phi_n & khi \ \ r \in \{1,3\}. \end{cases} \quad (0.2)$$

*Chứng minh.* Khi các biến đổi $F, F^{-1}$ và $T$ cùng xét trên không gian $L_1(\mathbb{R})$, ta có

$$T = (\frac{1}{2} + i)F + (\frac{1}{2} - i)F^{-1} \quad (0.3)$$

Mặt khác, $(F\phi_n)(x) = (-i)^n \phi_n(x)$ và $(F^{-1}\phi_n)(x) = i^n \phi_n(x)$ (xem [5]). Thay vào (0.3) ta thu được (0.2). Định lý được chứng minh.

**Định lý 2.** *Nếu* $f \in L_1(\mathbb{R}), (Tf) \in L_1(\mathbb{R})$ *và*

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (Tf)(y)[\cos xy + \frac{1}{2}\sin xy]dy,$$

*thì* $f_0(x) = f(x)$ *hầu khắp nơi trên* $\mathbb{R}$. *Khi đó ta gọi biến đổi ngược của* $T$

$$(T^{-1}g)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x)[\cos xy + \frac{1}{2}\sin xy]dx, \quad (0.4)$$

*l*

*Chứng minh.* Khi các biến đổi $F, F^{-1}$ và $T^{-1}$ cùng xét trên không gian $L_1(\mathbb{R})$, ta có

$$T^{-1} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i)F + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i)F^{-1} \quad (0.5)$$

Kết hợp (0.3), (0.5) và $F^4 = I$ (xem [5]) ta thu được $TT^{-1} = I$ và $T^{-1}T = I$. Định lý được chứng minh.

Từ Định lý 1, ta thấy $\phi_0$ là hàm riêng của biến đổi $T$. Do đó, ta chọn $\phi_0$ làm hàm trọng và xây dựng được tám tích chập suy rộng liên kết với các biến đổi $T, T^{-1}$ như sau:

**Định lý 3.** *Nếu* $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ *thì mỗi biến đổi tích phân* (0.6),(0.7), (0.8), (0.9)*là tích chập suy rộng liên kết với các biến đổi* $T, T^{-1}$ *với hàm trọng Hermite và thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa tương ứng.*

$$(f \underset{T,T,T}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)\Big[-\frac{5}{2}\phi_0(x+u+v) + \frac{5}{2}\phi_0(x+u-v) + \frac{5}{2}\phi_0(x-u+v) - \frac{1}{2}\phi_0(x-u-v)\Big]dudv, \quad (0.6)$$

$$T(f \underset{T,T,T}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) = \phi_0(x)(Tf)(x)(Tg)(x).$$

$$(f \underset{T,T,T^{-1}}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)\Big[-\frac{5}{8}\phi_0(x+u+v) + \frac{5}{8}\phi_0(x+u-v) + \frac{11}{8}\phi_0(x-u+v) + \frac{5}{8}\phi_0(x-u-v)\Big]dudv, \quad (0.7)$$

$$T(f \underset{T,T,T^{-1}}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) = \phi_0(x)(Tf)(x)(T^{-1}g)(x).$$

$$(f \underset{T,T^{-1},T}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)\Big[-\frac{5}{8}\phi_0(x+u+v) + \frac{11}{8}\phi_0(x+u-v) + \frac{5}{8}\phi_0(x-u+v) + \frac{5}{8}\phi_0(x-u-v)\Big]dudv, \quad (0.8)$$

$$T(f \underset{T,T^{-1},T}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) = \phi_0(x)(T^{-1}f)(x)(Tg)(x).$$

$$\Big(f \overset{\phi_0}{\underset{T,T^{-1},T^{-1}}{*}} g\Big)(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)$$

$$\Big[\phi_0(x+u+v)\frac{1}{2}+5\phi_0(x+u-v) \qquad (0.9)$$

$$+5\phi_0(x-u+v)+5\phi_0(x-u-v)\Big]dudv,$$

$$T\Big(f \overset{\phi_0}{\underset{T,T^{-1},T^{-1}}{*}} g\Big)(x) = \phi_0(x)(T^{-1}f)(x)(T^{-1}g)(x)$$

. *Chứng minh.* Trước tiên ta đi chứng minh bổ đề sau:

**Bổ đề 1.** *Nếu* $f,g\in L_1(\mathbb{R})$ *thì*

$$\frac{\phi_0(x)}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)\cos x(u+v)dudv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int_{\mathbb{R}}(\cos xy+2\sin xy)dy \qquad (0.10)$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)[\frac{1}{2}\phi_0(y-u-v)$$

$$+\frac{1}{2}\phi_0(y+u+v)]dudv.$$

$$\frac{\phi_0(x)}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)\sin x(u+v)dudv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int_{\mathbb{R}}(\cos xy+2\sin xy)dy \qquad (0.11)$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)[\frac{1}{4}\phi_0(y-u-v)$$

$$-\frac{1}{4}\phi_0(y+u+v)]dudv.$$

*Chứng minh bổ đề.* Sử dụng Định lý 1, ta có

$$\frac{\phi_0(x)}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)\cos x(u+v)dudv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int_{\mathbb{R}}\phi_0(t)[\cos xt+2\sin xt]dt$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)\cos x(u+v)dudv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}[\cos xt+2\sin xt]$$

$$\cos x(u+v)\phi_0(t)f(u)g(v)dtdudv$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{(2\pi)^3}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}[\cos x(t+u+v)$$

$$+2\sin x(t+u+v)+\cos x(t-u-v) \qquad (0.12)$$

$$+2\sin x(t-u-v)]\phi_0(t)f(u)g(v)dtdudv.$$

Đổi biến số $y=t\pm u\pm v$ trong tích phân (0.12), ta thu được

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int_{\mathbb{R}}(\cos xy+2\sin xy)dy$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)[\frac{1}{2}\phi_0(y-u-v)$$

$$+\frac{1}{2}\phi_0(y+u+v)]dudv.$$

Chứng minh (0.11) hoàn toàn tương tự (0.10). Bổ đề đã được chứng minh.

*Chứng minh Định lý 3*. Ta đi chứng minh tích chập (0.6).

Trước tiên, ta chỉ ra $\Big(f \overset{\phi_0}{\underset{T,T,T}{*}} g\Big)\in L_1(\mathbb{R})$. Thật vậy

$$\int_{\mathbb{R}}\Big|\Big(f \overset{\phi_0}{\underset{T,T,T}{*}} g\Big)(x)\Big|dx$$

$$\le\frac{5}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(u)||g(v)||\phi_0(x+u+v)|\,dudvdx$$

$$+\frac{5}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(u)||g(v)||\phi_0(x+u-v)|\,dudvdx$$

$$+\frac{5}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(u)||g(v)||\phi_0(x-u+v)|\,dudvdx$$

$$+\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(u)||g(v)||\phi_0(x-u-v)|\,dudvdx$$

$$<+\infty.$$

Bây giờ ta đi chứng minh đẳng thức nhân tử hóa. Sử dụng Bổ đề 1, ta có

$$\phi_0(x)(Tf)(x)(Tg)(x)$$

$$=\frac{\phi_0(x)}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)(\cos xu+2\sin xu)$$

$$(\cos xv+2\sin xv)dudv$$

$$=\frac{\phi_0(x)}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)[-3\cos x(u+v)$$

$$+5\cos x(u-v)+4\sin x(u+v)]dudv$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{(2\pi)^3}}\int_{\mathbb{R}}(\cos xy+2\sin xy)$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)[-\frac{5}{2}\phi_0(x+u+v)$$

$$+\frac{5}{2}\phi_0(x+u-v)+\frac{5}{2}\phi_0(x-u+v)$$

$$-\frac{1}{2}\phi_0(x-u-v)]dudvdy = T(f \underset{T,T,T}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x).$$

Các tích chập (0.7), (0.8), (0.9) chứng minh hoàn toàn tương tự như phép chứng minh của tích chập (0.6). Định lý 3 đã được chứng minh.

Đổi vai trò $T$ và $T^{-1}$ trong Định lý 3 ta thu được hệ quả sau:

**Hệ quả 1.** *Nếu $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ thì mỗi biến đổi tích phân (0.13), (0.14), (0.15), (0.16) là tích chập suy rộng liên kết với các biến đổi $T^{-1}, T$ với hàm trọng Hermite và thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa tương ứng.*

$$\begin{aligned}(f \underset{T^{-1},T^{-1},T^{-1}}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v) \\ &\Big[-\frac{5}{8}\phi_0(x+u+v)+\frac{5}{8}\phi_0(x+u-v) \\ &+\frac{5}{8}\phi_0(x-u+v)+\frac{11}{8}\phi_0(x-u-v)\Big]dudv,\end{aligned} \tag{0.13}$$

$$T^{-1}(f \underset{T^{-1},T^{-1},T^{-1}}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) = \phi_0(x)(T^{-1}f)(x)(T^{-1}g)(x).$$

$$\begin{aligned}(f \underset{T^{-1},T^{-1},T}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v) \\ &\Big[-\frac{5}{2}\phi_0(x+u+v)+\frac{5}{2}\phi_0(x+u-v) \\ &-\frac{1}{2}\phi_0(x-u+v)+\frac{5}{2}\phi_0(x-u-v)\Big]dudv,\end{aligned} \tag{0.14}$$

$$T^{-1}(f \underset{T^{-1},T^{-1},T}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) = \phi_0(x)(T^{-1}f)(x)(Tg)(x).$$

$$\begin{aligned}&(f \underset{T^{-1},T,T^{-1}}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)\Big[-\frac{5}{2}\phi_0(x+u+v) \\ &-\frac{1}{2}\phi_0(x+u-v)+\frac{5}{2}\phi_0(x-u+v) \\ &+\frac{5}{2}\phi_0(x-u-v)\Big]dudv,\end{aligned} \tag{0.15}$$

$$T^{-1}(f \underset{T^{-1},T,T^{-1}}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) = \phi_0(x)(Tf)(x)(T^{-1}g)(x).$$

$$\begin{aligned}&(f \underset{T^{-1},T,T}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)\Big[-\frac{11}{2}\phi_0(x+u+v) \\ &+\frac{5}{2}\phi_0(x+u-v)+\frac{5}{2}\phi_0(x-u+v) \\ &+\frac{5}{2}\phi_0(x-u-v)\Big]dudv,\end{aligned} \tag{0.16}$$

$$T^{-1}(f \underset{T^{-1},T,T}{\overset{\phi_0}{*}} g)(x) = \phi_0(x)(Tf)(x)(Tg)(x)$$

## 3. Ứng dụng giải phương trình tích phân

Xét phương trình

$$\begin{aligned}\lambda\varphi(x)+\frac{9}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}[p(u)\phi_0(x+u+v) \\ +q(u)\phi_0(x-u-v)]\varphi(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = f(x),\end{aligned} \tag{0.17}$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{C}$, các hàm $p, q, f \in L_1(\mathbb{R})$ là các hàm cho trước và $\varphi$ là hàm cần tìm trong $L_1(\mathbb{R})$. Phương trình (0.17) được gọi là phương trình tích phân dạng chập với nhân Gaussian. Phương trình này có nhiều ứng dụng trong Vật lý, Y học và Sinh học (xem [4]).

Đặt

$$\begin{aligned}A_1 &= \lambda+\phi_0[10(Tp)-40(T^{-1}p)-22(Tq)+40(T^{-1}q)],\\ B_1 &= \phi_0[-40(Tp)+11(T^{-1}p)+40(Tq)-5(T^{-1}q)],\\ A_2 &= \phi_0[-2(Tp)-10(T^{-1}p)-10(Tq)+10(T^{-1}q)],\\ B_2 &= \lambda+\phi_0[-10(Tp)+40(T^{-1}p)+10(Tq)+8(T^{-1}q)],\\ D &= A_1B_2-A_2B_1;\;\; D_1=(Tf)B_2-(T^{-1}f)B_1;\\ D_2 &= (T^{-1}f)A_1-(Tf)A_2.\end{aligned} \tag{0.18}$$

**Định lý 4.** *Cho $p, q, f \in L_1(\mathbb{R})$. Giả sử $D(x) \neq 0$ với mọi $x$ thuộc $\mathbb{R}$, và $\frac{D_1}{D} \in L_1(\mathbb{R})$. Phương trình (0.17) có nghiệm thuộc $L_1(\mathbb{R})$ khi và chỉ khi $(T^{-1}\frac{D_1}{D}) = (T\frac{D_2}{D}) \in L_1(\mathbb{R})$.*

*Khi đó, nghiệm của phương trình (0.17) xác định bởi công thức sau*

$$\varphi(x) = (T\tfrac{D_2}{D})(x). \tag{0.19}$$

*Chứng minh.* Từ các tích chập (0.6) - (0.9)và (0.13) - (0.16), ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{9}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}[p(u)\varphi(v)\phi_0(x+u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=10(f \overset{\phi_0}{\underset{T,T,T}{*}} g)-40(f \overset{\phi_0}{\underset{T,T,T^{-1}}{*}} g)\\
&\quad -40(f \overset{\phi_0}{\underset{T,T^{-1},T}{*}} g)+11(f \overset{\phi_0}{\underset{T,T^{-1},T^{-1}}{*}} g)\\
&=40(f \overset{\phi_0}{\underset{T^{-1},T^{-1},T^{-1}}{*}} g)-10(f \overset{\phi_0}{\underset{T^{-1},T^{-1},T}{*}} g)\\
&\quad -10(f \overset{\phi_0}{\underset{T^{-1},T,T^{-1}}{*}} g)-2(f \overset{\phi_0}{\underset{T^{-1},T,T}{*}} g).
\end{aligned} \tag{0.20}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{9}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}[p(u)\varphi(v)\phi_0(x-u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\\
&-22(f \overset{\phi_0}{\underset{T,T,T}{*}} g)+40(f \overset{\phi_0}{\underset{T,T,T^{-1}}{*}} g)+40(f \overset{\phi_0}{\underset{T,T^{-1},T}{*}} g)\\
&-5(f \overset{\phi_0}{\underset{T,T^{-1},T^{-1}}{*}} g)=8(f \overset{\phi_0}{\underset{T^{-1},T^{-1},T^{-1}}{*}} g)+10(f \overset{\phi_0}{\underset{T^{-1},T^{-1},T}{*}} g)\\
&+10(f \overset{\phi_0}{\underset{T^{-1},T,T^{-1}}{*}} g)-10(f \overset{\phi_0}{\underset{T^{-1},T,T}{*}} g).
\end{aligned} \tag{0.21}$$

*Điều kiện cần.* Giả sử phương trình (0.17) có nghiệm $\varphi\in L_1(\mathbb{R})$. Áp dụng biến đổi $T, T^{-1}$ vào hai vế của phương trình (0.17), sử dụng (0.20), (0.21) và các đẳng thức nhân tử hóa tương ứng, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} A_1(x)(T\varphi)(x)+B_1(x)(T^{-1}\varphi)(x)=(Tf)(x)\\ A_2(x)(T\varphi)(x)+B_2(x)(T^{-1}\varphi)(x)=(T^{-1}f)(x)\end{cases}, \tag{0.22}$$

trong đó $(T\varphi)(x), (T^{-1}\varphi)(x)$ là các hàm cần tìm. Các định thức của hệ (0.22) được xác định bởi (0.18). Từ $D(x)\neq 0$ với mọi $x$ thuộc $\mathbb{R}$, suy ra

$$(T\varphi)(x)=\tfrac{D_1(x)}{D(x)},\ (T^{-1}\varphi)(x)=\tfrac{D_2(x)}{D(x)}.$$

Theo Định lý 2, ta thu được $\varphi(x)=(T^{-1}\tfrac{D_1}{D})(x)=(T\tfrac{D_2}{D})(x)$.

Do vậy, $(T^{-1}\tfrac{D_1}{D})=(T\tfrac{D_2}{D})\in L_1(\mathbb{R})$.

*Điều kiện đủ.* Xét hàm

$$\varphi(x)=(T^{-1}\tfrac{D_1}{D})(x)=(T\tfrac{D_2}{D})(x). \tag{0.23}$$

Suy ra $\varphi\in L_1(\mathbb{R})$. Áp biến đổi $T, T^{-1}$ vào hai vế (0.23) ta thu được $(T\varphi)(x)=\tfrac{D_1(x)}{D(x)}$, $(T^{-1}\varphi)(x)=\tfrac{D_2(x)}{D(x)}$. Như vậy $(T\varphi), (T^{-1}\varphi)$ thỏa mãn hệ phương trình (0.22). Do đó

$$A_1(x)(T\varphi)(x)+B_1(x)(T^{-1}\varphi)(x)=(Tf)(x) \tag{0.24}$$

Phương trình (0.24) được viết lại

$$T\Big(\lambda\varphi(x)+\frac{9}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}[p(u)\phi_0(x+u+v)+q(u)\phi_0(x-u-v)]\varphi(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\Big)=(Tf)(x)$$

Suy ra hàm $\varphi(x)$ thỏa mãn phương trình (0.17) hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}$. Định lý đã được chứng minh.

## 4. Kết luận

Bài báo đã đưa ra một biến đổi tích phân mới dạng Fourier, chứng minh tích khả nghịch và biến đổi ngược; xây dựng tám tích chập suy rộng mới liên kết với biến đổi tích phân mới đưa ra; thu được điều kiện cần và đủ để phương trình tích phân dạng chập với nhân Gaussian có nghiệm và đưa ra công thức nghiệm tường minh.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] Bracewell R. N. (1986), *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, N. Y.

[2] Bracewell R. N. (1986), *The Hartley transform*, Oxford University Press, Oxford.

[3] Garcia-Vicente F. (2000), Delgado J. M., and Rodriguez C., “Exact analytical solution of the convolution integral equation for a general profile fitting function and Gaussian detector kernel”, *Phys. Med. and Biol.*, **45**(3), 2000, pp. 645 - 650.

[4] Giang B. T., and Tuan N. M. (2010), “Generalized convolutions and the integral equations of the convolution type”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **55**(4), 2010, pp. 331-345.

[5] Rudin W. (1991), *Functional Analysis*, McGraw-Hill, N. Y..

[6] Tuan N. M., and Huyen N. T. T. (2010), “The solvability and explicit solutions of two integral equations via generalized convolutions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **369**, 2010, pp. 712-718.

[7] Tuan N. M., and Tuan P. D. (2009), “Generalized convolutions relative to the Hartley transforms

with applications", *Sci. Math. Jpn*, **1**(70), 2009, pp. 77 - 89.

[8] Tuan N. M., and Tuan P. D. (2012), "Operator properties and Heisenberg uncertainty principles for a un-unitary integral operator", *Integral Transforms and Special Functions*, **23**(1), 2012, pp. 1 - 12.