SỬ DỤNG PHẦN MỀM MAPLE GIẢI CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN VỀ MẶT THAM SỐ TRONG MÔN HÌNH HỌC VI PHÂN

USING MAPLE SOFTWARE FOR SOLVING BASIC PROBLEMS OF PARAMETER SURFACE IN DIFFERENTIAL GEOMETRY SUBJECT

Phan Thị Hiệp, Trần Lê Nam

Trường Đại học Đồng Tháp

TÓM TẮT

Chúng tôi sử dụng các gói Linear Algebra, Maplet trên phần mềm Toán học Maple phiên bản 15.0 để lập trình ra các mô-đun mà chúng phải giải từng bước các dạng toán cơ bản của lý thuyết mặt trong môn hình học vi phân như: viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc, pháp tuyến chính, vẽ hình minh họa, tính diện tích, xác định dạng cơ bản thứ nhất và thứ hai, độ cong trung bình, độ cong Gauss của một mặt tham số chính qui. Đồng thời, chúng tôi đề xuất một thuật toán tìm độ cong chính và phương chính dựa trên ma trận của ánh xạ Gauss đối với cơ sở chính tắc của mặt phẳng tiếp xúc. Sau đó, chúng tôi thể hiện nó trên Maple. Mục đích của chúng tôi là tạo ra các công cụ hỗ trợ sinh viên kiểm tra lại các bước tính toán của mình, có nhiều thời gian nghiên cứu các vấn đề bản chất.

Từ khóa: Maple, độ cong chính, phương chính

ABSTRACT

We use the LinearAlgebra, Maplet packages in Maple software version 15.0 to programme the modules which must solve step by step the basis problems of surface theorem in differential geometry such as: write the equation of tangent planes, normal lines, draw illustration picture, evaluate the area, calculate the first and second fundamental form of parameter surface. Simultaneously, we propose algorithm to find the principal curvatures and principal curvature directions. Since, we represent it on maple. Our aim create the tools which help students checking all steps of their calculations, have more time to study essential problems.

Key words: Maple; principal curvatures; principal curvature directions

1. Mở đầu

Maple là một hệ thống đại số máy tính cho phép người sử dụng thực hiện các phép tính toán đại số trên các con số cụ thể, ký hiệu hoặc tham số và minh họa Toán học mạnh mẽ. Maple được xây dựng và phát triển bởi công ty Waterloo Maple Inc, tính đến nay Maple đã có phiên bản thứ 17. Các phiên bản về sau của Maple cung cấp nhiều công cụ trực quan, nhiều gói lệnh chuyên ngành phù hợp với các tính toán phổ thông và bậc đại học, giao diện hoàn thiện hơn và hỗ trợ soạn thảo tốt hơn. Đặc biệt, từ phiên bản 15, nó hỗ trợ lưu trữ tài liệu theo kiểu đám mây điện tử. Người dùng dễ dàng tìm kiếm các tài liệu liên quan về sử dụng từ internet. Chính những ưu điểm đó mà nhiều nước trên thế giới lựa chọn Maple làm phần mềm ứng dụng trong dạy học. Ở nước ta ngày nay Maple cũng dần được chú ý đến. Nhiều trường đại học đã bổ sung thêm vào khung chương trình môn "Sử dụng phần mềm Maple" hoặc yêu cầu sinh viên làm các bài thực hành trên Maple,… Nó đã góp phần làm thay đổi hẳn cách học Toán, tức là song song với lối giải truyền thống sinh viên có thể giải quyết bài toán với sự giúp đỡ của Maple. Phương pháp này đem đến cho sinh viên một cách tiếp cận mới với Toán học: sinh động, sáng tạo và rèn luyện khả năng tự học, tự kiểm tra và nghiên cứu.

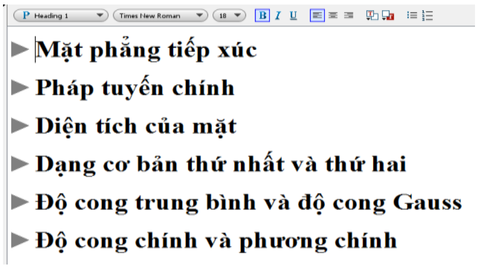
Lý thuyết mặt là một trong hai nội dung chính của môn hình học vi phân, được giảng dạy ở các trường Đại học sư phạm và Kỹ thuật. Nó có nhiều dạng bài tập liên quan đến tính toán các biểu thức đại số, vector và biểu thức có chứa tham số. Đặc biệt, nó có nhiều bài toán mang tính chất thuật toán như: viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc, pháp tuyến chính, tính diện tích, xác định dạng cơ bản thứ nhất và thứ hai, độ cong trung bình, độ cong Gauss…của một mặt tham số. Khai thác khả năng tính toán và lập trình của phần mềm Maple, chúng tôi viết một số mô-đun hỗ trợ tính toán từng bước và vẽ hình minh họa cho các dạng toán đó. Các mô-đun phải đáp ứng được các yêu cầu: chính xác và nhanh chóng, rút gọn được kết quả như thực hiện trên giấy, các biến đổi phải từng bước một. Đồng thời, chúng tôi cũng xây dựng thuật toán tìm độ cong chính và phương chính dựa vào ma trận của ánh xạ Gauss và thể hiện bằng mô-đun "*Độ cong chính và phương chính*" trên Maple.

2. Mô-đun giải các dạng toán cơ bản trong lý thuyết đường

2.1. Cách sử dụng các mô-đun

Nội dung của các mô-đun được lưu thành file Matthamso.mw, lưu trữ tại địa chỉ: https://www.dropbox.com/s/bo1iacy5istm03y/Matthamso.mw và địa chỉ:

https://docs.google.com/a/dthu.edu.vn/file/d/0B5zGtvvq1D5YRjZ3OFc3cm9hbmM/edit?usp=sharing. Sau khi download nó về, các bạn dùng chương trình Maple (version 15.0 trở lên) mở file Matthamso.mw, chờ chương trình load nội dung. Khi đó, cửa sổ của Maple xuất hiện 6 mục tương ứng với 6 mô-đun như Hình 1.



Hình 1. *Các mô-đun tính toán trên mặt tham số*

Để sử dụng Mô-đun nào, chúng ta click vào biểu tượng tam giác ▶ tương ứng với nó. Sau đó, đưa con trỏ đến chữ restart, gõ phím Enter và nhập vào các dữ liệu.

Các dữ liệu chung phải nhập vào các mô-đun bao gồm: tham số hóa của mặt, điều kiện của tham số hay miền xác định của tham số, tọa độ điểm đang xét. Chúng được thực hiện như sau:

- *Tham số hóa của mặt*: Mặt tham số $(S): X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ được nhập vào maplet tham số hóa bằng lệnh $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$

- *Điều kiện của tham số:* Giả sử tham số hóa của (S) có điều kiện $u_0 \le u \le u_1$ và $v_0 \le v \le v_1$, chúng ta nhập vào maplet điều kiện bằng lệnh: (u_0 <= u) and (u <= u_1) and (v_0 <= v) and (v <= v_1)

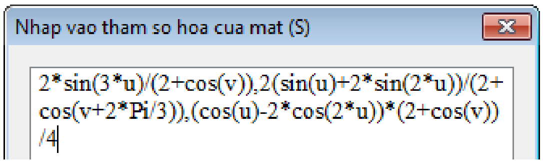
Lưu ý: giá trị π được nhập vào bởi lệnh *Pi*.

- *Tọa độ của điểm đang xét:* Nếu chúng ta thực hiện tính toán tại điểm $X(u_0, v_0)$ thì chúng ta nhập cặp u_0, v_0 vào maplet tọa độ. Ngược lại, nếu chúng ta xét bài toán đối với điểm tổng quát thì chúng ta nhập vào cặp *u,v* vào maplet tọa độ.

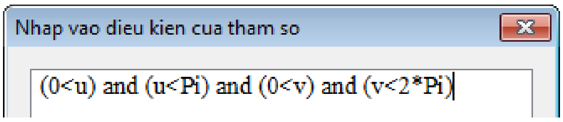
Ví dụ 1: *Mặt* (S) *có tham số hóa dạng*

$$X(u,v) = \left(\frac{2\sin 3u}{2+\cos v}, \frac{2(\sin u + 2\sin 2u)}{2+\cos(v+2\pi/3)}, \frac{(\cos u - 2\cos 2u)(2+\cos v)}{4} \right)$$

Với $(u,v) \in (0,\pi) \times (0,2\pi)$ *được nhập vào các mô-đun như Hình 2 và Hình 2.*



Hình 2. *Nhập vào tham số hóa của mặt (S)*



Hình 3. *Nhập vào điều kiện của tham số hóa*

2.2. Chức năng của các mô-đun

2.2.1. Xác phương trình mặt phẳng tiếp xúc của mặt tham số

Click vào biểu biểu tượng tam giác ▶ ứng với nội dung Mặt phẳng tiếp xúc, đưa con trỏ đến chữ restart, gõ phím Enter. Khi đó, Maple lần lượt đưa ra 3 maplet yêu cầu chúng ta nhập vào tham số hóa của mặt, khoảng xác định của tham số và giá trị của *(u,v)* ứng với tiếp điểm. Nếu chúng ta muốn tìm phương trình mặt phẳng tiếp xúc tại điểm bất kì thì chúng ta nhập *u,v* vào maplet.

Sau khi nhập đầy đủ 3 dữ liệu, Maple sẽ

tiến hành tính toán và đưa ra phương trình tổng quát của mặt phẳng tiếp xúc.

Lưu ý: Nếu chương trình không tự load kết quả thì các bạn kéo thanh trượt ngang trên giao diện đến cuối mô-đun để xem kết quả (phần chữ màu xanh).

Thêm vào đó, các bạn có thể xem hình vẽ mặt tham số (S) và mặt phẳng tiếp xúc (trong trường hợp nhập giá trị tiếp điểm cụ thể) bằng cách đưa con trỏ vào mô-đun "Hình vẽ của mặt phẳng tiếp xúc", nhấn phím Enter. Khi đó, chương trình đưa ra một maplet yêu cầu nhập vào miền giá trị cần vẽ của tham số.

2.2.2. Mô-đun viết phương trình pháp tuyến chính

Tương tự mô-đun viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc, chúng ta kích hoạt mô-đun, nhập vào tham số hóa, miền xác định và tọa độ điểm đi qua. Chương trình sẽ tính các đạo hàm X_u, X_v, tích có hướng của chúng. Từ đó, nó đưa ra phương trình tham số của pháp tuyến chính và vẽ hình minh họa.

2.2.3. Tính diện tích của mặt tham số

Sau khi kích hoạt mô-đun, nhập vào tham số hóa và miền xác định của mặt tham số (S). Chương trình sẽ tính các đạo hàm cấp 1 của tham số, các hệ số của dạng cơ bản thứ nhất, suy ra phần tử thể tích. Từ đó, đưa ra công thức tính diện tích của mặt (S) và xác định giá trị của nó. Cuối cùng, nó đưa ra hình vẽ minh họa mặt (S).

Ví dụ 3: *Dùng mô-đun xác định diện tích của mặt tham số*

(S): $X(u,v)=\left(u^2\sin(v),\, u^2\cos(v),\, u\right)$ *trong miền* $(0,1)\times(0,2\pi)$. Chúng ta được kết quả

"Cho X(u,v) = (u^2*sin(v) , u^2*cos(v) , u)"

"Xu=", $\left[\, 2\,u\sin(v) \quad 2\,u\cos(v) \quad 1 \,\right]$

"Xv=", $\left[\, u^2\cos(v) \quad -u^2\sin(v) \quad 0 \,\right]$

"Các hệ số của dạng cơ bản thứ nhất lần lượt bằng"

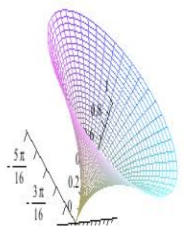
$4\,u^2+1,\ 0,\ u^4$

"Phần tử diện tích bằng", $\sqrt{\left(4\,u^2+1\right)u^4}$

"Diện tích của mặt đã cho bằng"

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\left(4u^2+1\right)u^4}\,du\,dv = -\frac{1}{16}\ln(2)\,\pi+\frac{9}{16}\sqrt{5}\,\pi-\frac{1}{32}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)\pi$$

"Giá trị đó gần bằng", 3.809729704



2.2.4. Mô-đun xác định dạng cơ bản thứ nhất và thứ hai của mặt tham số

Sau khi kích hoạt, nhập vào tham số hóa, điều kiện của tham số. Chương trình sẽ tính các đạo hàm cấp 1, cấp 2 của tham số $X(u,v)$. Từ đó, nó xác định pháp vector, tính và rút gọn các hệ số của dạng cơ bản thứ nhất, thứ hai. Cuối cùng, nó cho ra biểu thức của các dạng cơ bản cần tìm.

2.2.5. Xác định độ cong Gauss và độ cong trung bình

Để sử dụng mô-đun, chúng ta nhập vào tham số hóa *X*, điều kiện của tham số. Sau đó, chương trình yêu cầu các bạn nhập vào tọa độ điểm cần xét. Có hai trường hợp.

a) Trường hợp 1. Nếu các bạn muốn xác định công thức tính độ cong trung bình và Gauss (tính tại điểm tổng quát) thì chúng ta nhập vào *u,v* cho maplet tọa độ tham số. Khi đó, chương trình sẽ tính và rút gọn các đạo hàm cấp 1, cấp 2 của $X(u,v)$ theo điều kiện mà chúng ta đã nhập vào. Sau đó, Maple tính tích có hướng của 2 đạo hàm cấp 1, rút gọn các hệ số của dạng cơ bản thứ nhất, thứ hai.

Dựa vào các hệ, nó đưa ra công thức xác định độ cong Gauss và độ cong trung bình của (S).

Lưu ý: chương trình đã được lập trình để rút gọn theo điều kiện của tham số như tính tay. Do đó, nếu kết quả tính toán của các bạn khác với máy tính thì chúng ta nên kiểm tra lại từng bước một dựa vào các bước tính của Maple.

b) Trường hợp 2. Nếu điểm đang xét có giá trị cụ thể của tham số thì chúng ta nhập 2 giá trị đó vào maplet giá trị của tham số, hai giá trị của tham số được phân cách bởi dấu “,”. Sau khi nhập đủ dữ liệu, chương trình sẽ tiến hành xác định các đạo hàm cấp 1, cấp 2 của tham số, rút gọn nó theo điều kiện nhập vào ban đầu, thay các giá trị của tham số vào các đạo hàm. Từ đó, nó tính ra các hệ của dạng các cơ bản tại điểm đó. Cuối cùng, Maple cho chúng ta giá trị của độ cong Gauss và độ cong trung bình tại điểm đang xét.

Ví dụ 4: *Dùng mô-đun xác định công thức tính độ cong Gauss và độ cong trung bình của mặt tham số* $(S): X(u,v) = (\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, \sinh u)$, *với hai tham số nằm trong tập* $(0,+\infty)\times(0,\pi)$.

Sau khi nhập các dữ liệu, Maple cho ra kết quả

"Cho X(u,v) = (cosh(u)*sin(v) , cosh(u)*cos(v) , sinh(u)) với 0 < u and 0 < v and v < Pi"

"Với tham số trên, chúng ta có các đạo hàm"

$$\text{"Xu=",}\left[\begin{array}{ccc}\sinh(u)\sin(v) & \sinh(u)\cos(v) & \cosh(u)\end{array}\right]$$

$$\text{"Xv=",}\left[\begin{array}{ccc}\cosh(u)\cos(v) & -\cosh(u)\sin(v) & 0\end{array}\right]$$

$$\text{"Xuu=",}\left[\begin{array}{ccc}\cosh(u)\sin(v) & \cosh(u)\cos(v) & \sinh(u)\end{array}\right]$$

$$\text{"Xuv=",}\left[\begin{array}{ccc}\sinh(u)\cos(v) & -\sinh(u)\sin(v) & 0\end{array}\right]$$

$$\text{"Xvv=",}\left[\begin{array}{ccc}-\cosh(u)\sin(v) & -\cosh(u)\cos(v) & 0\end{array}\right]$$

"Các hệ số của dạng cơ bản thứ nhất bằng"

$$2\cosh(u)^2-1,\ 0,\ \cosh(u)^2$$

"Tích có hướng của 2 vector Xu và Xv bằng"

$$\left[\begin{array}{ccc}\cosh(u)^2\sin(v) & \cosh(u)^2\cos(v) & -\sinh(u)\cosh(u)\end{array}\right]$$

"Modun của vector tích có hướng bằng"

$$\sqrt{\left(2\cosh(u)^2-1\right)\cosh(u)^2}$$

"Các hệ số của dạng cơ bản thứ hai bằng"

$$\frac{1}{\sqrt{2\cosh(u)^2-1}},\ 0,\ -\frac{\cosh(u)^2}{\sqrt{2\cosh(u)^2-1}}$$

"Tích có hướng của 2 vector Xu và Xv bằng"

$$\left[\begin{array}{ccc}\cosh(u)^2\sin(v) & \cosh(u)^2\cos(v) & -\sinh(u)\cosh(u)\end{array}\right]$$

"Modun của vector tích có hướng bằng"

$$\sqrt{\left(2\cosh(u)^2-1\right)\cosh(u)^2}$$

"Các hệ số của dạng cơ bản thứ hai bằng"

$$\frac{1}{\sqrt{2\cosh(u)^2-1}},\ 0,\ -\frac{\cosh(u)^2}{\sqrt{2\cosh(u)^2-1}}$$

$$\text{"Độ cong trung bình bằng"},\ -\frac{\sinh(u)^2}{\left(2\cosh(u)^2-1\right)^{3/2}}$$

$$\text{"Độ cong Gauss bằng"},\ -\frac{1}{2\left(1+4\cosh(u)^4-4\cosh(u)^2\right)}$$

2.2.6. Mô-đun xác định độ cong chính và phương chính

a) Thuật toán xác định độ cong chính và phương chính

Bước 1: Xác định các hệ số của dạng cơ bản thứ nhất và thứ hai.

Bước 2: Xác định ma trận $A=\left(a_{ij}\right)$ của ánh xạ Gauss đối với cơ sở $\{X_u, X_v\}$

Bước 3: Xác định 2 giá trị riêng $\lambda_{1,2}=\dfrac{\operatorname{tr}(A)\pm\sqrt{\operatorname{tr}(A)^2-4\det(A)}}{2}$ của A.

Bước 4: Nếu $\lambda_1=\lambda_2$ thì kết luận mọi phương đều là phương chính. Ngược lại, nếu $\lambda_1\neq\lambda_2$ thì chúng ta xét tiếp

+ Nếu $a_{11}-\lambda_1\neq 0$ thì $\vec{v}_1\left(-a_{12}, a_{11}-\lambda_1\right)$ là một vector chỉ phương chính của (S).

+ Ngược lại, nếu $a_{11}-\lambda_1=0$ thì

$\vec{v}_1(a_{22}-\lambda_1,-a_{21})$ là một vector chỉ phương chính của (S).

Bước 5: Tương tự, xác định phương chính thứ 2.

Bước 6: Kết luận $-\lambda_{1,2}$ là 2 độ cong chính, hai vector $\vec{v}_{1,2}$ là hai vector chỉ phương chính của mặt tham số (S).

b) Sử dụng mô-đun

Sau khi kích hoạt, nhập vào tham số hóa, điều kiện của tham số, giá trị của điểm cần xét (tổng quát hoặc cụ thể). Maple sử dụng thuật toán trên rút gọn các kết quả và cho ra các đạo hàm cấp 1, cấp 2, tọa độ của pháp vector, hệ số của dạng cơ bản thứ nhất và thứ 2, ma trận A của ánh xạ Gauss, phương trình đặt trưng, giá trị riêng, vector riêng của ma trận A. Cuối cùng, mô-đun cho biết giá trị của 2 độ cong chính, tọa độ của các vector chỉ phương chính.

c) Ví dụ 5: *Sử dụng mô-đun xác định độ cong chính và phương chính của mặt tham số* $(S): X(u,v)=(u-v,u+v,u^2-v^2)$ *tại điểm* $X(1,1)$.

Sau khi nhập vào mô-đun các dữ liệu, Maple tiến hành tính toán, cho ra các đạo hàm, giá trị của chúng tại điểm $X(1,1)$, các hệ số của các dạng cơ bản và

"Ma trận của ánh xạ Gauss đối với cơ sở {Xu,Xv} bằng"

$$\text{"A=",}\begin{bmatrix}\frac{3}{10} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0\\ 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5}\end{bmatrix},\text{"=",}\begin{bmatrix}\frac{3}{25}\sqrt{5} & -\frac{2}{25}\sqrt{5}\\ \frac{2}{25}\sqrt{5} & -\frac{3}{25}\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

"Phương trình đặc trưng của ma trận trên có dạng:"

$$\lambda^2-\frac{1}{25}=0$$

"Phương trình trên có nghiệm" $\lambda_1=\frac{1}{5}, \lambda_2=-\frac{1}{5}$

"Suy ra hai độ cong chính lần lượt bằng" $-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}$

"Hệ phương trình xác định vector riêng ứng với giá trị riêng thứ nhất"

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{3}{25}\sqrt{5}-\frac{1}{5}\right)v_1-\frac{2}{25}\sqrt{5}\,v_2\\ \frac{2}{25}\sqrt{5}\,v_1+\left(-\frac{3}{25}\sqrt{5}-\frac{1}{5}\right)v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

"Suy ra vector chỉ phương chính thứ nhất có tọa độ dạng"

$$\left[-\frac{1}{25}\left(\sqrt{5}-5\right)a \quad \frac{1}{5}\left(\sqrt{5}-1\right)a \quad -\frac{2}{25}\left(\sqrt{5}-5\right)a\right]$$

3. Kết luận

Dựa vào tính toán tốc độ, chính xác, hỗ trợ lập trình của phần mềm Toán học Maple, chúng tôi đã lập trình 6 mô-đun tương ứng với 6 dạng toán cơ bản về lý thuyết mặt trong môn hình học vi phân. Đó là các mô-đun viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc, viết phương trình pháp tuyến chính, xác định diện tích, xác định các dạng cơ bản, tính độ cong Gauss và độ cong trung bình, tìm độ cong chính và phương chính của mặt tham số.

Các mô-đun trong bài báo đã khai thác một số ưu điểm của phần mềm Maple để giải nhanh chóng và chính xác các dạng toán cơ bản đó theo từng bước. Nhờ vào đó, chúng ta có thể kiểm tra từng bước một trong các bài làm, rút ngắn được thời gian cho việc tính toán, kiểm tra, có nhiều thời gian nghiên cứu các vấn đề bản chất của môn học. Hơn nữa, từ các hình vẽ, người sử dụng có được một cái nhìn trực giác, tổng quan về các mặt đang được khảo sát. Vì vậy, các giảng viên có thể sử dụng các mô-đun để định hướng cho việc ra các đề bài và kiểm tra tính toán của người học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Quốc Chiến, Võ Đăng Thể (4/2009), *Sử dụng phần mềm Maple hỗ trợ dạy và học bài toán tìm các điểm cố định của họ đường cong*, Tạp chí Khoa học và Công nghệ, số 4, tr. 83-88, Đại

học Đà Nẵng.

[2] Corless R. M. (2003), *Essential Maple 7, An Introduction for Scientific Programmers*, Springer.

[3] Phạm Huy Điển (2002), *Tính toán, lập trình và giảng dạy toán học trên Maple*, NXB Khoa học và Kỹ thuật.

[4] Đoàn Thế Hiếu (2008), *Bài giảng môn hình học vi phân*, Tài liệu lưu hành nội bộ, ĐHSP Huế.

[5] Monagan M.B., Geddes K.O., Heal K.M., Labahn G., Vorkoetter S.M., Carron J., DeMarco P. (2007), *Maple Introductory Programming Guide*, Canada.

[6] Nguyễn Chánh Tú (4/2004), *Ứng dụng Maple trong đổi mới phương pháp học tập và giảng dạy Toán học*, Kỷ yếu Hội thảo khoa học, tr. 10-16, ĐHSP Huế.