# VÀNH NỘI XẠ ĐƠN VÀ VÀNH LINH HÓA TỬ ĐƠN

MININJECTIVE AND MINANNIHILATOR RINGS

***Phan Chí Dũng***

*Khoa Y Dược, Đại học Đà Nẵng*

**TÓM TẮT**

Trong bài báo này chúng tôi làm rõ một số tính chất của vành nội xạ đơn, nửa hoàn chỉnh. Một số tính chất của vành tựa Frobenius thông qua điều kiện vành nội xạ đơn đã được nghiên cứu. Đặc biệt, một vành tựa Frobenius nếu và chỉ nếu vành đó là vành Artin hai phía và nội xạ đơn hai phía. Dựa vào kết quả này, chúng tôi chứng minh được một vành tựa Frobenius nếu và chỉ nếu vành đó là vành linh hóa tử đơn hai phía, thỏa điều kiện ACC trên các linh hóa tử với đế trái cốt yếu.

**Từ khóa:** vành tựa Frobenius; vành nội xạ đơn; vành linh hóa tử đơn; vành nửa hoàn chỉnh

**ABSTRACT**

In this paper, some properties of mininjective rings and semiperfect rings are identified. Some characteristics of quasi Frobenius via mininjectivity are studied. In this case, a ring is a quasi Frobenius ring if and only if the ring is the two sided Artinian and two sided mininjective. Based on this result, we show that a ring is a quasi Frobenius ring if and only if the ring is the two sided minannihilator, satisfying the condition ACC on annihilators and essential left socle.

**Key words :** quasi Frobenius rings; mininjective ring; minannihilator rings; semiperfect rings

## 1. Giới thiệu

Trong bài báo này, vành *R* đã cho luôn được giả thiết là vành kết hợp có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi *R*-môđun được xét là môđun unita. Trong mục này, chúng tôi giới thiệu những khái niệm cơ bản được sử dụng trong bài báo. Một số khái niệm khác liên quan đến bài báo chúng ta có thể tham khảo trong Nicholson và Yousif ([3]), Wisbauer ([5]). Với vành *R* đã cho, ta viết $M_R$ (tương ứng, ${}_RM$) để chỉ $M$ là một *R*-môđun phải (t.ư, trái). Trong một ngữ cảnh cụ thể của bài báo, khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, để đơn giản ta viết môđun *M* thay vì $M_R$. Chúng ta dùng các ký hiệu $A \leq M$ $(A < M)$ để chỉ $A$ là môđun con (t.ư., thực sự) của $M$. Cho *M* là một *R*-môđun phải và tập *X* là tập khác rỗng của *M*. Linh hóa tử phải của $X$ trong $R$ được ký hiệu là $r_R(X)$ và được xác định như sau:

$$r_R(X) = \{r \in R \mid xr = 0, \forall x \in X\}.$$

Khi không sợ nhầm lẫn ta có thể viết gọn là *r(X)* thay vì $r_R(X)$. Khi $X = \{x_{1,} x_2, ..., x_n\}$ thì ta viết $r(x_{1,} x_2, ..., x_n)$ thay vì $r(\{x_{1,} x_2, ..., x_n\})$. Ta có $r_R(X)$ là một iđêan phải của vành *R*. Một vành được gọi *là nội xạ đơn phải* nếu $\mathrm{lr(a)} = \mathrm{Ra}$ cho mỗi iđêan phải đơn *aR* củaR. Một vành được gọi là *linh hóa tử đơn phải* nếu mỗi iđêan phải đơn của R là một linh hóa tử.

Trong bài báo này, trước hết chúng tôi nghiên cứu các đặc trưng của vành nội xạ đơn nửa hoàn chỉnh. Một số điều kiện để một vành trở thành vành nội xạ đơn đã được nghiên cứu. Ngoài ra chúng tôi nêu lại một số tính chất của vành tựa Frobenius thông qua điều kiện vành nội xạ đơn. Đặc biệt, một vành tựa Frobenius nếu và chỉ nếu vành đó là vành Artin hai phía và nội xạ đơn hai phía. Các kết quả này đã được nghiên cứu bởi Ikeda, Nicholson và Yousif ([3]). Dựa vào kết quả này, chúng tôi chứng minh được một vành tựa Frobenius nếu và chỉ nếu vành đó là vành linh hóa tử đơn hai phía, thỏa điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải với đế trái cốt yếu.

**2. Vành nội xạ đơn.**

Trước hết chúng tôi nghiên cứu các đặc trưng của vành nửa hoàn chỉnh, nội xạ đơn. Các đặc trưng này được chứng minh trong [3].

Cho m là R-moodun phải: Chúng ta ký hiệu $m^*$ = Hom(m,R).

**Định lý 2.1.** Cho $e$ là lũy đẳng trong vành $R$. Khi đó

(1) $(eR/eJ(R))^* \cong l(J(R))e.$

(2) Nếu $R$ là vành nửa địa phương thì $(eR/eJ(R))^* \cong soc(R_R)e.$

*Chứng minh:* Ta có $eR/eJ(R) = mR$ với $m = e + eJ(R)$. Vì vậy áp dụng Mệnh đề 2.2.8 [3] ta có $(eR/eJ(R))^* \cong l(T),$ khi đó $T = r(m)$. Lại có $T = J(R) + (1-e)R$, vì vậy $l(T) = l(J(R)) \cap Re = l(J(R))e.$

Ta chứng minh được (1), vì $soc(R_R) = l(J(R))$ khi $R$ là nửa địa phương, chúng ta suy ra (2).

Từ kết quả trên chúng ta có:

**Hệ quả 2.2.** Một vành địa phương $R$ là vành nội xạ đơn phải nếu và chỉ nếu $soc(R_R)$ là iđêan phải đơn hoặc là không .

Điều kiện để một vành hoàn chỉnh trở thành vành nội xạ đơn được thể hiện ở định lý sau.

**Định lí 2.3.** Cho $R$ là vành nửa hoàn chỉnh. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

(1) $R$ là vành nội xạ đơn phải nếu và chỉ nếu $soc(R_R)e$ hoặc là đơn hoặc là $0$ cho mỗi phần tử lũy đẳng địa phương $e \in R$.

(2) $R$ là Kasch phải nếu và chỉ nếu $soc(R_R)e \neq 0$ cho mỗi phần tử lũy đẳng địa phương $e \in R$.

*Chứng minh:*

Cho $M_R$ là một môđun đơn. Từ $R$ là nửa hoàn chỉnh ta có $Me \neq 0$ đối với mỗi phần tử lũy đẳng địa phương $e$, nghĩa là $me \neq 0$, với $m \in M$ nào đó. Xét ánh xạ:

$$eR \to M$$
$$x \text{ a } mex$$

Khi đó ánh xạ đó là một toàn cấu. Khi đó một $M_R$ môđun là đơn nếu và chỉ nếu $M_R \cong eR/eJ(R)$ đối với mỗi phần tử lũy đẳng địa phương $e$. Mặt khác, vì $R$ là nửa địa phương áp dụng Định lý 2.1 suy ra $(eR/eJ(R))^* \cong soc(R_R)e$. Áp dụng Định lý 2.2.9 [3] ta có (1).

**Định lý 2.4.** Cho $R$ là vành nửa hoàn chỉnh, nội xạ đơn phải. Khi đó:

(1) $soc(R_R)$ là nửa đơn và Artin như $R$-môđun trái.

(2) Nếu $0 \neq k \in soc(eR)$ với mỗi $e^2 = e$ là địa phương, thì $Rk$ là đơn.

(3) Nếu $R$ là Kasch phải thì các khẳng định sau là tương đương:

(a) $\mathrm{soc}(R_R) = \mathrm{soc}({}_R R)$.

(b) $lr(K) = K$ với mỗi phần tử lũy đẳng địa phương e € R và $K \subseteq Re$ là iđêan trái đơn.

(c) $soc(Re) = soc(R_R)e$ với mỗi phần tử địa phương $e^2 = e \in R$.

(d) $soc(Re)$ là đơn với mỗi phần tử địa phương $e^2 = e \in R$.

*Chứng minh:*

Nếu $1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$ với $e_i$ là phần tử lũy đẳng địa phương trong $R$, thì $soc(R_R) = \sum_i soc(R_R)e_i$. Áp dụng Định lý 2.1 ta có (1).

Ta chứng minh (2), ta có $0 \neq k \in soc(eR)$, suy ra $R(1-e) \subseteq l(k)$ và

$J(R) \subseteq l(R)$ vì

$$soc(eR) \subseteq soc(R_R) \subseteq soc({}_R R)$$

do đó $J(R) + R(1-e) \subseteq l(k) \neq R$, vì vậy $l(k) = J(R) + R(1-e)$ là cực đại.

Ta chứng minh (3). Giả sử $R$ là Kasch phải.

$(a) \Rightarrow (b)$. Giả sử rằng $K \subseteq Re$ là một iđêan trái đơn, $e^2 = e \in R$ là địa phương. Ta có $KJ(R) = 0$ theo *(a),* do đó $r(K) \supseteq J(R) + (1-e)R$. Suy ra $J(R) + (1-e)R$ là cực đại. Do đó $r(K)$ là cực đại. Suy ra $lr(K)$ là đơn. Mặt khác $K \subseteq lr(K)$ nên ta có *(b).*

$(b) \Rightarrow (c)$. Cho $K \subseteq Re$ là iđêan trái đơn suy ra $r(K) \supseteq J(R) + (1-e)R.$

Tương tự ta cũng có $r(K) \subseteq J(R) + (1-e)R$ bởi vì $J(R) + (1-e)R$ là iđêan phải cực đại duy nhất chứa $(1-e)R$. Nhưng từ *(b)* và *R* là địa phương nên

$$K = lr(K) \supseteq l[J(R) + (1-e)R] = l(J(R)) \cap Re$$
$$= soc(R_R) \cap Re = soc(R_R)e$$

Mặt khác, theo Định lý 2.1 $soc(R_R)e \neq 0$ vì vậy $K = soc(R_R)e$ (vì *K* đơn).

$(c) \Rightarrow (d)$ Áp dụng Định lý 2.1 ta có điều này là hiển nhiên vì *R* là nội xạ đơn phải và Kasch phải.

$(d) \Rightarrow (a)$. Từ *(d)* ta có $soc(Re) = soc(R_R)e$ với mỗi phần tử lũy đẳng địa phương $e^2 = e$ theo Định lý 2.1. Cho $1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$ với $e_i$ là các phần tử lũy đẳng, trực giao. Vậy $soc({}_R R) = \oplus_i soc(Re_i) = \oplus_i soc({}_R R)e_i \subseteq soc(R_R)$

Mặt khác ta có $soc(R_R) \subseteq soc({}_R R)$ vì R là vành nội xạ đơn phải.

**Định lí 2.5.** Các khẳng định sau là tương đương cho vành *R*

(1) *R* là tựa Frobenius.

(2) *R* là vành nội xạ đơn hai phía và Artin hai phía.

*Chứng minh:* Từ (2), áp dụng Định lý 1.2.1 [3] ta có được $rl(T) = T$ đối với mỗi iđêan phải *T* của *R.*

Trước hết ta chứng minh: Nếu $K \subseteq T$ là các iđêan phải và $T / K$ là đơn, thì $l(K)/l(T)$ là đơn hoặc bằng không. Thật vậy ta có:

Nếu $a \in l(K)$ thì:

$$\lambda_a : T / K \to R_R$$
$$\lambda_a(t + K) \text{ a } \quad at$$

Khi đó $a \to \lambda_a$ là một đồng cấu từ $l(K)$ đến $(T / K)^*$. Mặt khác *R* là vành nội xạ đơn phải áp nên dụng Định lý 2.2.9 [3] ta có điều phải chứng minh.

Giả sử *T* là một iđêan phải của *R* và cho $0 = T_0 \subset T_1 \subset ... \subset T_n = R$ là một dãy hợp thành các iđêan phải của *R* chứa *T.* Ta đã chứng minh được $rl(T_i) = T_i$ với mỗi *i.* Khi đó xét các linh hóa tử trái của dãy:

$$R = l(T_0) \supseteq l(T_1) \supseteq ... \supseteq ... \supseteq l(T_n) = 0$$

Tức là $length({}_R R)_{,}, n = length(R_R)$ tương tự ta cũng có $length({}_R R)..n = length(R_R)$. Vì vậy $lenghth({}_R R) = length(R_R)$ Theo chứng minh trên ta thấy (*) là một dãy hợp thành của ${}_R R$. Lặp lại quá trình đó với các linh hóa tử phải của dãy ta được $0 = rl(T_0) \subset rl(T_1) \subset ... \subset rl(T_n) = R$

Từ $T_1 \subseteq rl(T_1)$ ta suy ra $\mathrm{T}_1 = \mathrm{rl}(\mathrm{T}_1)$, từ $T_2 \subseteq rl(T_2), T_2 = rl(T_2), ..., T_n \subseteq rl(T_n)$ suy ra $\mathrm{T}_n = \mathrm{rl}(\mathrm{T}_n)$.

### 3. Vành linh hóa tử đơn

Trong phần này chúng tôi chứng minh được một đặc trưng của vành tựa Frobenius thông qua vành linh hóa tử đơn. Trước hết chúng ta có:

**Định lí 3.1** Cho *R* là vành thỏa mãn điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải sao cho $soc({}_R R)$ cốt yếu trong $R_R$. Khi đó *R* là vành nửa nguyên sơ với $J(R) = Z(R_R)$.

<u>*Chứng minh:*</u> Chúng ta sẽ chứng minh định lý này qua các bước sau:

Trước hết chúng ta chỉ ra $J(R) = l(soc({}_R R)) = Z(R_R)$ và *J(R)* là lũy linh. Thật vậy, chúng ta có thể viết $soc({}_R R) = \bigoplus_{i\in A} Rx_i$, với mỗi $Rx_i$ là các iđêan trái đơn và *A* là một tập chỉ số nào đó. Giả sử $J(R)x_i \neq 0$ với mỗi $i \in A$. Vì mỗi $Rx_i$ là đơn nên $J(R)x_i = Rx_i$. Điều này cho ta $x_i = rx_i$ với $r \in J(R)$ nào đó. Hơn nữa $1-r$ là khả nghịch nên $x_i = 0$ điều này mâu thuẫn. Vì vậy $J(R)x_i = 0$ với mỗi $i \in A$ và do đó $J(R) \leq l(soc({}_R R))$ Mặt khác, với mỗi $x \in l(soc({}_R R))$ và lấy *I* là một iđêan phải của *R* sao cho $I \cap r(x) = 0$ chúng ta sẽ chứng minh $I = 0$. Giả sử ngược lại $I \neq 0$. Theo giả thiết $soc({}_R R)$ cốt yếu trong $R_R$ nên ta có $soc({}_R R) \cap I \neq 0$. Khi đó chúng ta có thể lấy $0 \neq k \in soc({}_R R) \cap I$. Suy ra $xk = 0$ hay $k \in r(x)$ và do đó $k \in r(x) \cap I = 0$ điều này mâu thuẫn. Vì vậy chúng ta phải có *I=0*. Từ đây suy ra $r(x)$ là cốt yếu trong $R_R$ nghĩa là $x \in Z(R_R)$. Tóm lại chúng ta đã chứng minh được $l(soc({}_R R)) \leq Z(R_R)$. Ngoài ra vì *R* thỏa mãn điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải nên $Z(R_R)$ là lũy linh. Suy ra $Z(R_R) \leq J(R)$ vậy $J(R) = l(soc({}_R R)) = Z(R_R)$ và *J(R)* là lũy linh. Chúng ta sẽ chỉ ra tồn tại tập con $\{m_1, \ldots, m_n\}$ của $soc({}_R R)$ sao cho $l(soc({}_R R)) = l(\{m_1, \ldots, m_n\})$ (1). Thật vậy, vì *R* thỏa mãn điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải nên *R* thỏa mãn điều kiện DCC trên các linh hóa tử trái. Khi đó tồn tại tập con $\{m_1, ..., m_n\}$ của $soc({}_R R)$ sao cho:

$$\mathrm{l}\left(\mathrm{soc}({}_R R)\right) = \mathrm{l}\left(\{\mathrm{m}_1, ..., \mathrm{m}_n\}\right) \quad (2)$$

*Chúng ta sẽ chứng minh $R/J(R)$ là nửa đơn.*

Từ (1) và (2), chúng ta có $J(R) = l(soc({}_R R)) = l(\{m_1, ..., m_n\}) = \bigcap_{i=1}^{n} l(m_i)$.

Với mỗi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vì $m_i \in soc({}_R R)$ nên tồn tại $k_i \in \mathbb{N}$ sao cho $Rm_i = Rl_{i1} \oplus \ldots \oplus Rl_{ik_i}$ cho các iđêan trái đơn $Rl_{ij}$ (với mỗi $j \in \{1, \ldots, k_i\}$) nào đó của *R*. Không mất tính tổng quát chúng ta có thể viết $m_i = x_{i1} + \ldots + x_{ik_i}$ với $0 \neq x_{ij} \in Rl_{ij}$ nào đó (với mỗi $j \in \{1, \ldots, k_i\}$). Suy ra $l(m_i) = \bigcap_{j=1}^{k_i} l(x_{ij})$ và $l(x_{ij})$ là các iđêan trái cực đại của *R* (bởi vì $Rx_{ij} = Rl_{ij}$ với mỗi $j \in \{1, \ldots, k_i\}$). Từ điều này suy ra tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $J(R) = \bigcap_{i=1}^{k} l(y_i)$ với các iđêan trái cực đại $l(y_i)$ của *R*. Chúng ta xét đồng cấu $\varphi : R/J(R) = \bigcap_{i=1}^{k} l(y_i) \to \bigoplus_{i=1}^{k} R/l(y_i)$, xác định bởi:

$$\varphi(r + \bigcap_{i=1}^{k} l(y_i)) = (r + l(y_1), \ldots, r + l(y_k))$$

Khi đó $\varphi$ là đơn cấu. Vậy $R/J(R)$ là nửa đơn.

Tóm lại vành *R* có $R/J(R)$ là nửa đơn và $J(R)$ là lũy linh hay *R* là vành nửa nguyên sơ.

Bây giờ chúng tôi chứng minh kết quả chính sau :

**Định lý 3.2** Cho vành *R*. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

(i) *R* là vành tựa Frobenius.

(ii) *R* là vành linh hóa tử đơn hai phía, thỏa mãn điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải và $soc({}_R R)$ cốt yếu trong $R_R$.

*Chứng minh:*

(i) $\Rightarrow$(ii) là hiển nhiên.

(ii) $\Rightarrow$(i). Theo Định lý 3.1 thì *R* là vành nửa nguyên sơ. Tiếp theo chúng ta sẽ chứng minh *R* là vành nội xạ đơn trái. Thật vậy cho $Rk$ là một iđêan trái đơn. Vì $soc(R_R)$ cốt yếu trong $R_R$ (bởi vì *R* là vành nửa nguyên sơ) nên tồn tại một iđêan phải đơn $mR$ sao cho $mR \le kR$. Suy ra $l(k) \le l(m)$ và do đó $l(k) = l(m)$ (bởi vì $l(k)$ là iđêan trái cực đại của *R*). Theo giả thiết *R* là linh hóa tử đơn phải nên $kR \le rl(k) = rl(m) = mR$. Do đó ta có $\mathrm{kR} = \mathrm{rl}(\mathrm{k})$. Vậy *R* là vành nội xạ đơn trái.

Chứng minh hoàn toàn tương tự chúng ta cũng có *R* là vành nội xạ đơn phải. Từ đây chúng ta suy ra *R* là vành tựa Frobenius.

**Hệ quả 3.3** Cho vành *R*. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

*(i)* *R* là vành tựa Frobenius.

*(ii)* *R* là vành nội xạ đơn hai phía, thỏa mãn điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải và $soc(R_R)$ cốt yếu trong $R_R$.

*Chứng minh:*

*(i)* $\Rightarrow$*(ii)* là hiển nhiên.

*(ii)* $\Rightarrow$*(i).* Giả sử *R* thỏa mãn điều kiện (ii). Khi đó *R* là linh hóa tử đơn hai phía và $soc(R_R)$ cốt yếu trong $R_R$. Suy ra $soc({}_R R)$ cốt yếu trong $R_R$. Vậy *R* là vành tựa Frobenius.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] F.W. Anderson and K.R. Fuller, Rings and categories of modules, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1974.

[2] N. V. Dung, D. V. Huynh, P. F. Smith, and R. Wisbauer, Extending Modules, Pitman Research Notes Vol. 313. Longman, Harlow, New York, 1994.

[3] W. K., Nicholson, M. F. Yousif, Quasi-Frobenius Rings, *Cambridge Univ. Press.*, 2003.

[4] T. C. Quynh, L. V. Thuyet, *On rings with ACC on annihilators and having essential socles,* East-West J. Math, 227-234, 2005.

[5] R. Wisbauer, Foundations of Module and Ring Theory; *Gordon and Breach: Reading,* 1991.