MÔĐUN GIẢ NỘI XẠ CỐT YẾU

*Phan Thế Hải, Trương Công Quỳnh **

TÓM TẮT

Cho M và N là các môđun. Môđun M được gọi là N- giả nội xạ cốt yếu nếu với mọi môđun con A cốt yếu của N, với mọi đơn cấu $f: A \to M$ đều mở rộng thành đồng cấu $g: N \to M$. Môđun M được gọi là môđun giả nội xạ cốt yếu nếu M là $M-$ giả nội xạ cốt yếu. Các tính chất cơ bản của các môđun giả nội xạ cốt yếu lẫn nhau và môđun giả nội xạ cốt yếu đã được nghiên cứu. Hơn nữa, mối quan hệ của chúng với các môđun giả nội xạ sẽ được chúng toi giới thiệu trong bài báo.

Từ khóa: giả nội xạ cốt yếu, giả nội xạ.

1. Mở đầu

Cho M và N là các $R-$môđun phải trên vành R. Môđun M được gọi là $N-$ giả nội xạ nếu với mọi môđun con A của N, với mọi đơn cấu trong $Hom_R(A,M)$ đều mở rộng thành đồng cấu thuộc $Hom_R(N,M)$. Môđun M được gọi là giả nội xạ nếu M là $M-$ giả nội xạ [3]. Gần đây, nhiều tác giả đã quan tâm đến lớp các môđun giả nội xạ và mở rộng chúng theo nhiều hướng khác nhau [1, 2, 3, 6].... Theo [1], môđun M được gọi là $N-$ giả nội xạ cốt yếu nếu với mọi môđun con A cốt yếu của N, với mọi đơn cấu $f: A \to M$ đều mở rộng thành đồng cấu $g: N \to M$. Môđun M được gọi là môđun giả nội xạ cốt yếu nếu M là $M-$ giả nội xạ cốt yếu. Một số tính chất của môđun giả nội xạ cốt yếu và các ứng dụng của chúng đối với $QF-$vành đã được đưa ra. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ chỉ ra một số đặc trưng khác của các môđun giả nội xạ cốt yếu lẫn nhau và môđun giả nội xạ cốt yếu. Việc đặc trưng một số lớp vành cổ điển thông qua môđun giả nội xạ cốt yếu đã được nghiên cứu.

Trong toàn bộ bài báo, vành R được xét là vành kết hợp có phần tử đơn vị và tất cả các môđun xét trên vành R đều là $R-$ môđun phải unita. Chúng tôi cũng ký hiệu M_R để chỉ M là $R-$ môđun phải. Với N là môđun con của *M*, chúng tôi dùng các ký hiệu $A \le M$ ($M < N$), $N \le^{\oplus} M$ và $N \le^{e} M$ để ký hiệu N là môđun con của M (tương ứng, môđun con thực sự), N là hạng tử trực tiếp của M và N là môđun con cốt yếu của *M*.

2. Môđun giả nội xạ cốt yếu và cốt yếu lẫn nhau

Cho M và N là các môđun. Môđun M được gọi là $N-$ *giả nội xạ cốt yếu* nếu với mọi môđun con A cốt yếu của *N*, với mọi đơn cấu $f: A \to M$ đều có thể mở rộng thành đồng cấu $g: N \to M$. Môđun *M* được gọi là *môđun giả nội xạ cốt yếu* nếu M là $M-$ giả nội xạ cốt yếu. Dễ dàng suy ra nếu M là $N-$ giả nội xạ thì *M* là *N*-giả nội xạ cốt yếu. Nhưng điều ngược lại không đúng trong trường hợp tổng quát.

Ví dụ 2.1. *Cho p là một số nguyên tố. Khi đó* **Z**-*môđun* **Z/p²** *là* **Z** $\oplus$ **Z/p²** *- giả nội xạ cốt yếu nhưng nó không phải là* **Z** $\oplus$ **Z/p²** *- giả nội xạ.*

Trước hết, chúng tôi đặc trưng các môđun giả nội xạ cốt yếu và đặc trưng này được chứng minh trong [6, Theorem 2.2].

Định lý 2.2. *Các điều kiện sau đây là tương đương đối với các môđun M và N :*

(1) M là $N-$ giả nội xạ cốt yếu.

(2) $\alpha(N)\le M$ với mọi đơn cấu $\alpha: E(N)\to E(M)$.

Chứng minh. $(1)\Rightarrow(2)$. Cho $\alpha: E(N)\to E(M)$ là một đơn cấu. Đặt $A=N\cap\alpha^{-1}(M)$, khi đó $A\le^e N$ và $\alpha(A)\le M$. Vì vậy, tồn tại đồng cấu $g:N\to M$ sao cho $g(a)=\alpha(a)\quad\forall a\in A$. Ta sẽ chứng minh $g(n)=\alpha(n)\quad\forall n\in N$. Giả sử $\exists n_0\in N$ để $g(n_0)\ne\alpha(n_0)$. Đặt $x=g(n_0)-\alpha(n_0)\in E(M)$. Vì $M\le^e E(M)$ nên tồn tại $r\in R$ sao cho $0\ne xr=g(n_0r)-\alpha(n_0r)\in M$. Do đó $\alpha(n_0r)\in M\Rightarrow\alpha(n_0r)=g(n_0r)\Rightarrow xr=0,$ điều này mâu thuẫn.

$(2)\Rightarrow(1)$. Giả sử $f:A\to M$ là đơn cấu cốt yếu với $A\le^e N$. Hiển nhiên $E(A)=E(N)$. Do $A\le^e N$ nên tồn tại đơn cấu $g:E(N)\to E(M)$ sao cho $g|_A=f$. Do đó $g(N)\le M$. Vậy g là mở rộng cần tìm của f.

Hệ quả 2.3. *Các điều kiện sau đây là tương đương:*

(1) M là giả nội xạ cốt yếu.

(2) $\alpha(M)\le M$ với mọi đơn cấu α của $E(M)$.

Một mô đun con N của M được gọi là *bất biến hoàn toàn* nếu $f(N)$ được chứa trong N với mọi $f\in End(M_R)$. Rõ ràng 0 và M là các môđun con bất biến của M.

Định lý 2.4. *Các điều kiện sau đây là tương đương đối với môđun M :*

(1) Mọi môđun con của M là giả nội xạ cốt yếu.

(2) M là giả nội xạ cốt yếu và mọi môđun con cốt yếu của M là bất biến hoàn toàn qua mọi đơn cấu của M.

(3) Mọi môđun con cốt yếu của M là giả nội xạ cốt yếu.

Chứng minh. $(1)\Rightarrow(2)$. Cho f là đơn cấu của M. Khi đó tồn tại một đơn cấu g của $E(M)$ sao cho g là mở rộng của f. Do đó với mỗi môđun con cốt yếu H của M thì $g(H)\le H$ hoặc $f(H)\le H$ (vì $E(H)=E(M)$).

$(2) \Rightarrow (3)$. Cho H là môđun con cốt yếu của M. Đặt $f: A \to H$ là một đơn cấu với $A \leq^e H$. Khi đó tồn tại một đơn cấu g của $E(M)$ sao cho g là mở rộng của f. Từ đó suy ra $f(H) \leq H$ và $g|_H$ là mở rộng của f.

$(3) \Rightarrow (1)$. Giả sử H là môđun con của M, khi đó tồn tại môđun con K của M sao cho $H \oplus K \leq^e M$. Theo (3), $H \oplus K$ là giả nội xạ cốt yếu, do đó H cũng là giả nội xạ cốt yếu.

Hai môđun M và N được gọi là *giả nội xạ cốt yếu lẫn nhau* nếu M là $N-$ giả nội xạ cốt yếu và N là $M-$ giả nội xạ cốt yếu.

Mệnh đề 2.5. *Cho M và N là các môđun.*

(1) M là $N-$ giả nội xạ cốt yếu nếu và chỉ nếu M là $K-$giả nội xạ cốt yếu với mọi môđun con cốt yếu K của M.

(2) Nếu M là $N-$ giả nội xạ cốt yếu và K đẳng cấu với N, thì M là $K-$giả nội xạ cốt yếu.

(3) Giả sử M và N là các môđun giả nội xạ cốt yếu. Nếu tồn tại một đẳng cấu giữa các môđun A và B sao cho $A \leq^e N$ và $B \leq^e M$ thì M đẳng cấu với N.

(4) Giả sử A và B là các môđun giả nội xạ cốt yếu lẫn nhau. Nếu E(A) đẳng cấu với E(B) thì với mỗi đẳng cấu từ $E(A) \to E(B)$ đều thu gọn được thành đẳng cấu $A \to B$, nói riêng A đẳng cấu với B. Do vậy, đó A và B là các môđun giả nội xạ cốt yếu.

Chứng minh.

(1). Cho $L \leq^e K \leq^e N$ và $f: L \to M$ là đơn cấu. Dễ thấy $E(L) = E(K) = E(N)$. Khi đó tồn tại đơn cấu $g: E(A) \to E(B)$ sao cho $g|_L = f$. Theo Định lý 2.2, từ M là $N-$ giả nội xạ cốt yếu, chúng ta suy ra $g(N) \leq M$. Vậy $g(K) \leq M$.

(2). Cho $L \leq^e K$ và $g: K \to N$ là đẳng cấu. Rõ ràng, $g(L) \leq^e N$. Ta có, với mỗi đơn cấu $f: L \to M$ thì tồn tại một đơn cấu $fg': g(L) \to M$, trong đó $g': g(L) \to L$ là đơn cấu. Do M là $N-$ giả nội xạ cốt yếu nên ánh xạ hợp thành fg' được mở rộng thành $h: N \to M$. Do đó $hg: K \to M$ là đồng cấu cần tìm.

(3). Cho $f: A \to B$ là một đẳng cấu. Do M là $N-$ giả nội xạ cốt yếu nên tồn tại một đồng cấu $g: E(N) \to E(M)$ sao cho $g|_A = f$. Từ $A \leq^e N$ và $B \leq^e M$, ta có g là đẳng cấu. Do đó $g(N) \leq M$ và $g^{-1}(M) \leq N$ (theo Định lý 2.2). Vì vậy, $g|_N : N \to M$ là đẳng cấu.

(4). Cho $g: E(A) \to E(B)$ là một đẳng cấu. Vì B là $A-$ giả nội xạ cốt yếu nên

$g(A) \le B$ (theo Định lý 2.2). Tương tự $g^{-1}(B) \le A$. Khi đó
$B = (gg^{-1})(B) = g((g^{-1})(B)) \le g(A) \le B$. Vì vậy, $g(A) = B$ và $g|_A : A \to B$ là một đẳng cấu. Từ A là $B-$ giả nội xạ cốt yếu và B đẳng cấu với A, chúng ta suy ra A là $A-$ giả nội xạ cốt yếu hay A là môđun giả nội xạ cốt yếu.

Sau đây, chúng tôi sẽ trình bày một số tính chất khác của một môđun là $N-$ giả nội xạ cốt yếu.

Định lý 2.6. *Cho M và N là các môđun.*

(1) N là một môđun nửa đơn nếu và chỉ nếu M là $N-$ giả nội xạ cốt yếu với mọi môđun M.

(2) Giả sử $N = A \oplus B$ và $M = C \oplus D$ sao cho B được nhúng trong D. Nếu M là $N-$ giả nội xạ cốt yếu thì C là $A-$ giả nội xạ cốt yếu.

Chứng minh.

(1). Lấy $A \le N$ và $C \le N$ sao cho $A \oplus C \le^e N$. Giả sử $\tau : A \oplus C \to N$ là đơn cấu chính tắc. Do $A \oplus C$ là $N-$ giả nội xạ cốt yếu nên tồn tại $f : N \to A \oplus C$ sao cho $f\tau = 1_{A\oplus C}$, tức là $N = A \oplus C$. Điều ngược lại là hiển nhiên.

(2). Giả sử $\alpha : B \to D$ là đơn cấu. Đặt $f : H \to C$ là đơn cấu với $H \le^e A$. Thế thì, $f \oplus \alpha : H \oplus B \to M$ là một đơn cấu. Do M là $N-$ giả nội xạ cốt yếu nên tồn tại đồng cấu $g : M \to N$ sao cho g là mở rộng của $f \oplus \alpha$. Đặt $\overline{f} = \pi g \tau : A \to C$ trong đó $\pi : M \to C$ là phép chiếu còn $\tau : A \to C$ là đơn cấu chính tắc. Khi đó $\overline{f}|_H = f$. Vì vậy, C là $A-$ giả nội xạ cốt yếu.

Hệ quả 2.7. *Mỗi hạng tử trực tiếp của một môđun giả nội xạ cốt yếu là giả nội xạ cốt yếu.*

Chứng minh. Hệ quả được suy ra từ Định lý 2.6.

Tiếp theo chúng tôi xét điều kiện môđun tựa nội xạ thông qua điều kiện giả nội xạ cốt yếu.

Bổ đề 2.8. *Mọi môđun giả nội xạ cốt yếu đều thỏa mãn tính chất (C3).*

Chứng minh.

Cho M là môđun giả nội xạ cốt yếu. Giả sử A và B là 2 hạng tử của M sao cho $A \cap B = 0$. Chúng ta cần chứng minh $A \oplus B$ cũng là hạng tử của M. Đặt $M = A \oplus A'$ và $\pi : M \to A'$ là phép chiếu chính tắc. Gọi C là một môđun con của M sao cho $(A + B) \cap C = 0$ và $A \oplus B \oplus C \le^e M$. Đặt $D = B \oplus C$, khi đó $A \oplus D = A \oplus \pi(D)$ và $\pi|_D : D \to \pi(D)$ là đẳng cấu. Vì vậy,

$1_A \oplus \pi|_D : A \oplus D \to A \oplus \pi(D)$ cũng là đẳng cấu. Do M là giả nội xạ cốt yếu và $A \oplus D$ là cốt yếu trong M nên $1_A \oplus \pi|_D$ được mở rộng thành đẳng cấu g của M. Vì B là hạng tử của M và $\pi(B) = g(B)$ cũng là hạng tử của M nên suy ra $\pi(B)$ là hạng tử của A'. Do đó $A \oplus B = A \oplus \pi(B)$ là hạng tử của M.

Định lý 2.9. *M là tựa nội xạ nếu và chỉ nếu M là $CS-$môđun giả nội xạ cốt yếu.*

Chứng minh.

Từ Bổ đề 2.8 và giả thiết ta có M là tựa liên tục. Khi đó, với mọi $f \in End(E(M))$ thì $f = e + g$ trong đó $e^2 = e \in End(E(M))$ và $g \in Aut(E(M))$.

Do đó $f(M) = e(M) + g(M) \le M$. Vậy M là tựa nội xạ.

Hệ quả 2.10. *M là tựa nội xạ khi và chỉ khi M là $CS-$môđun giả nội xạ.*

Trong phần tiếp theo chúng tôi xét các tính chất của vành giả nội xạ cốt yếu và các kết quả này được lấy từ [6].

Một vành R được gọi *giả nội xạ cốt yếu phải* nếu R_R là môđun giả nội xạ cốt yếu.

Định lý 2.11. *Cho M là môđun tự sinh. Nếu $End(M)$ là giả nội xạ cốt yếu phải thì M là giả nội xạ cốt yếu.*

Chứng minh.

Đặt $S = End(M)$ và $f : A \to M$ là một đơn cấu với $A \le^e M$. Đặt $I = \{g \in S / g(M \le A\}$, khi đó I là iđêan phải của S. Chúng ta sẽ chứng minh I là iđêan phải côt yếu của S. Thật vậy, với mọi $0 \ne s \in S$ thì $s(m_0) \ne 0$ cho $m_0 \in M$ nào đó. Do $A \le^e M$ nên tồn tại $r \in R$ sao cho $0 \ne s(m_0 r) \in A$ hay $(m_0 rR) \le A$. Mặt khác, từ M là môđun tự sinh nên $m_0 rR = \sum_{u \in K} u(M)$ cho $K \subset S$ nào đó. Nhưng $m_0 rR \ne 0$ nên tồn tại $u \in K$ sao cho $0 \ne su(M) \le A$ hay $0 \ne su \in I$. Ta xây dựng đồng cấu $\phi : I \to S_S$ sao cho $\phi(g) = fg$. Do f R-đơn cấu nên ϕ là $S-$đơn cấu. Vì S là giả nội xạ cốt yếu phải nên $\phi(g) = \overline{f}g$ cho $\overline{f} \in S$ nào đó. Vậy $\overline{f}g = fg, \forall g \in I$. Với mỗi $a \in A$, tồn tại $u_1, ..., u_k \in I; m_1, ..., m_k \in M$ sao cho $a = u_1(m_1) + ... + u_k(m_k)$. Do vậy, $\overline{f}(a) = \overline{f}u_1(m_1) + ... + \overline{f}u_k(m_k) = fu_1(m_1) + ... + fu_k(m_k) = f(a)$, tức là $\overline{f}$ là mở rộng của f.

Cho R là một vành và Ω là lớp $R-$môđun, Ω được gọi là *socle fine* nếu $\forall M, N \in \Omega$ thì *Soc(M)* đẳng cấu với *Soc(N)* nếu và chỉ nếu M đẳng cấu với N ([4]).

Một môđun M được gọi là *giả nội xạ cốt yếu mạnh* nếu M là $N-$ giả nội xạ cốt yếu với mọi N là $R-$môđun phải. Chúng ta ký hiệu $\varsigma\varepsilon$ là lớp các $R-$môđun phải giả nội xạ cốt yếu mạnh và $\wp\Re$ là lớp các $R-$môđun phải xạ ảnh.

Định lý 2.12. *Các điều kiện sau đây là tương đương đối với vành R.*

(1) *R là $QF-$ vành.*

(2) *Hợp $\wp\Re\cup\varsigma\varepsilon$ là socle fine.*

Chứng minh.

$(1)\Rightarrow(2)$. Nếu R là $QF-$ vành thì các $R-$môđun xạ ảnh là nội xạ. Vậy $\wp\Re\cup\varsigma\varepsilon=\varsigma\varepsilon$. Lấy $M,N\in\varsigma\varepsilon$ sao cho *Soc(M)* đẳng cấu với *Soc(N)*, do đó *E(Soc(M))* đẳng cấu với *E(Soc(N))*. Vì R là vành Artin phải nên $Soc(M)\leq^e M$ và $Soc(N)\leq^e N$, do đó *E(M)* đẳng cấu với *E(N)*. Kết hợp với (4) của mệnh đề 2.5 ta nhận được *M* đẳng cấu với *N*. Điều đó chứng tỏ $\wp\Re\cup\varsigma\varepsilon$ là socle fine .

$(2)\Rightarrow(1)$. Cho P là $R-$môđun phải xạ ảnh, thế thì $P\in\wp\Re$, $E(P)\cup\varsigma\varepsilon$ và *Soc(P)* đẳng cấu với *Soc(E(P))*. Từ (2) chúng ta có *P* đẳng cấu với *E(P)* và do đó P là nội xạ. Vì vậy R là $QF-$ vành.

Định lý 2.13. *Các điều kiện sau đây là tương đương đối với vành R.*

(1) *R là vành nửa đơn.*

(2) *Họ các môđun giả nội xạ cốt yếu là socle fine.*

(3) *Họ $\varsigma\varepsilon$ là socle fine.*

Chứng minh.

$(1)\Rightarrow(2)$. Vì R là vành nửa đơn nên họ các $R-$môđun là socle fine.

$(2)\Rightarrow(3)$. Hiển nhiên.

$(3)\Rightarrow(1)$. Dễ thấy *Soc(E(R_R))* đẳng cấu với *Soc(R_R)*, từ $E(R_R)$ và $Soc(M)$ là các môđun giả nội xạ cốt yếu nên chúng ta có *E(R_R)* đẳng cấu với *Soc(R_R)*, (theo (3)). Điều đó suy ra $E(R_R)$ là vành nửa đơn và vì vậy R là vành nửa đơn.

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu trên một lớp vành quan trọng.

Định lý 2.14. *Cho R là môđun giả nội xạ cốt yếu phải. Nếu $e^2=e\in R$ thỏa mãn $ReR=R$ thì $S=eRe$ là giả nội xạ cốt yếu phải.*

Chứng minh.

Đặt $\theta:T\rightarrow S_S$ là $S-$đơn cấu cốt yếu, trong đó T là iđêal phải cốt yếu của S.

Đặt đồng cấu $h: TR \to R_R$ sao cho $h\left(\sum_i t_i r_i\right) = \sum_i \theta(t_i) r_i$ với mọi $t_i \in T$ và $r_i \in R$. Giả sử rằng $\sum_i t_i r_i = 0$, khi đó với mọi $r \in R$ thì $\sum_i t_i r_i re = 0$ hoặc $\sum_i t_i (er_i re) = 0$, suy ra $\sum_i \theta(t_i (er_i re)) = 0$ hoặc $\sum_i \theta(t_i)(er_i re) = 0 \Rightarrow \sum_i \theta(t_i) r_i re = 0$ và do đó $\sum_i \theta(t_i) r_i = 0$. Điều này có nghĩa θ là $R-$đồng cấu. Lặp lại quá trình trên thì h cũng là $R-$đơn cấu. Tiếp theo, chúng ta sẽ chỉ ra rằng $TR \leq^e eR$ và $Im(h) \leq^e eR$. Thật vậy, với mọi $0 \neq ex \in eR$ thì tồn tại $x_0 \in R$ sao cho $exx_0 e \neq 0$. Vì $T \leq^e S_S$ nên tồn tại $ex_1 e \in S$ sao cho $0 \neq \left(exx_0 e\right) ex_1 e \in T$ hay $0 \neq (ex)(x_0 ex_1 e) \in TR$, suy ra $TR \leq^e eR$. Do đó, $TR \oplus (1-e)R \leq^e R_R$ và $\operatorname{Im} h \oplus (1-e)R \leq^e R_R$. Điều này chứng tỏ tồn tại một $R-$đơn cấu cốt yếu $g: TR \oplus (1-e)R \to R_R$ là mở rộng của h. Vì R là môđun giả nội xạ cốt yếu phải nên g có thể mở rộng thành $R-$đồng cấu $\phi: R_R \to R_R$. Do đó tồn tại $c \in R$ sao cho $\phi(x) = cr \quad \forall r \in R$. Khi đó $\theta(t) = e\theta(t) = e\phi(t) = ect = ecet$. Đặt $\overline{\theta}: S_S \to S_S$ với $\overline{\theta}(s) = (ece)s \quad \forall s \in S$, thế thì $\overline{\theta}$ là $S-$đồng cấu và là mở rộng của đồng cấu θ.

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng giả thiết $ReR = R$ trong Định lý 2.15 là không thể thiếu.

Ví dụ 2.15. *Cho R như trong* [5, Example 9], *tức là R là đại số ma trận trên trường*

$$K \text{ có dạng } \begin{pmatrix} a & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Đặt $e = e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44} + e_{55}$, trong đó e_{ij} là các ma trận đơn vị, khi đó e là lũy đẳng của R và $ReR \neq R$. Hơn nữa, R là giả nội xạ cốt yếu phải nhưng $S = eRe$ không phải là giả nội xạ cốt yếu phải.

Chứng minh. Theo [5, Example 9], R là $QF-$vành, $S = eRe$ không phải là $QF-$vành và đẳng cấu với vành các ma trận cấp hai tam giác dưới trên trường K. Khi đó R là đẳng cấu bất biến phải, S là CS phải và Artin phải. Nếu S là giả nội xạ cốt yếu phải thì S là $QF-$vành theo Định lý 2.15.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Alahmadi, A., Er, N. and Jain, S.K. (2005). Modules which are invariant under monomorphisms of their injective hulls. J. Aust. Math. Soc. 79(3):349-360.

[2] Dinh, H.Q.(2005). A note on pseudo-injective modules. Commun. Algebra

33:361-369.

[3] Jain, S.K. and Singh, S. (1975). Quasi - injective and pseudo - injective modules, Canad. Math. Bull., 18(3)359-365.

[4] Idelhadj, A., Kaidi, E., Martin, Barquero, D., Martn Gonzlez, C. (2004). Rings whose class of projective modules is socle fine. Publ. Mat. 48(2), 397-408.

[5] Koike, K. (1995). Dual rings and cogenerator rings. Math. J. Okayama Univ. 37:99103.

[6] Quynh, T. C., Hai, P. T. Relative essentially pseudo injective. Preprint

ESSENTIALLY PSEUDO INJECTIVE MODULES

Phan The Hai, Truong Cong Quynh

[1]*Baria -Vungtau teacher training College*

[2] *Faculty of Mathematics, The University of Danang, University of Science and Education*

ABSTRACT

Let *M* and *N* be two modules. *M* is called essentially pseudo *N*-injective if any essential submodule *A* of *N*, any monomorphism $f : A \to M$ can be extended to some $g \in Hom(M, N)$. *M* is called the essentially pseudo injective module if *M* is essentially pseudo *M*-injective. In this paper, basic properties of mutually essentially pseudo injective modules and essentially pseudo injective modules are proved and their connections with pseudo-injective modules are addressed.

Key words:essentially pseudo injective, pseudo injective

* ThS. Phan Thế Hải, Trường CĐSP Bà Rịa – Vũng Tàu

TS. Trương Công Quỳnh, Email: tcquynh@dce.udn.vn Trường Đại học Sư phạm, ĐHĐN