ĐỊNH LÍ HỘI TỤ THEO TRUNG BÌNH ĐỐI VỚI MẢNG CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN NHẬN GIÁ TRỊ TRONG KHÔNG GIAN BANACH

*Lê Văn Dũng, Tôn Thất Tú**

TÓM TẮT

Cho $\{X_{ij}; i \geq 1, j \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach E với chuẩn $\|\cdot\|$, $\{a_{mnij}; m \geq 1, n \geq 1, 1 \leq i \leq u_m, 1 \leq j \leq v_n\}$ là mảng các hằng số thực, trong bài báo này chúng tôi thiết lập điều kiện đủ để thu được định lí hội tụ theo trung bình dạng $\max\limits_{\substack{1\leq k\leq u_m \\ 1\leq l\leq v_n}} \left\| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_{mnij} X_{ij} \right\| \xrightarrow{L_p}$ khi $n \vee m \to \infty$ và định lí hội tụ theo trung bình với chỉ số ngẫu nhiên dạng $\left\| \sum_{i=1}^{T_m} \sum_{j=1}^{\tau_n} a_{mnij} X_{ij} \right\| \xrightarrow{L_p} 0$ khi $n \wedge m \to \infty$, trong đó $\{T_m; m \geq 1\}$ và $\{\tau_n, n \geq 1\}$ là dãy các đại lượng ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, $\{u_m; m \geq 1\}, \{v_n; n \geq 1\}$ là 2 dãy các số nguyên dương thỏa mãn $\lim\limits_{m\to\infty} u_m = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \infty$. Các kết quả của chúng tôi là mở rộng các Định lí 1 và Định lí 2 của Rosalsky và các tác giả khác [3]. Hơn nữa, từ kết quả hội tụ theo trung bình, áp dụng bất đẳng thức Markov ta dễ dàng suy ra được kết quả về luật yếu số lớn đối với mảng nhiều chiều các đại lượng ngẫu nhiên.

Từ khóa: Hội tụ trung bình; Mảng hai chiều; Biến ngẫu nhiên Banach-giá trị; Đại lượng ngẫu nhiên; Luật yếu số lớn.

1. Đặt vấn đề

Cho không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ và E là không gian Banach khả ly, thực với chuẩn $\|\cdot\|$. Trong bài báo này chúng tôi mở rộng kết quả của Rosalsky và các tác giả khác [3] cho mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach p-trơn đều đối với mảng hai chiều các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach p – trơn đều.

2. Kết quả nghiên cứu

Với $a, b \in \mathbb{R}$, kí hiệu $\max\{a,b\}, \min\{a,b\}$ lần lượt là $a \vee b, a \wedge b$. Trong bài báo này chúng tôi kí hiệu C là hằng số dương tổng quát không nhất thiết phải giống nhau trong mỗi lần xuất hiện. Cho không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ và E là không gian Banach khả ly, thực với chuẩn $\|\cdot\|$, biến ngẫu nhiên $X : \Omega \to E$ được gọi là *biến ngẫu nhiên E -giá trị*. Trong trường hợp $E = \mathbb{R}$, ta sẽ gọi X là *đại lượng ngẫu nhiên*.

Scalora [4] đưa ra khái niệm kì vọng có điều kiện của biến ngẫu nhiên E -giá trị. Với X là biến ngẫu nhiên E -giá trị và G là một σ-đại số con của $\mathcal{F}$, kì vọng có điều kiện $E(X/G)$ được định nghĩa tương tự như kì vọng có điều kiện của đại lượng ngẫu nhiên và ta cũng có các tính chất tương tự.

Một không gian Banach khả ly, thực E được gọi là không gian *p-trơn đều* $(1 \le p \le 2)$ nếu tồn tại hằng số dương C sao cho với mọi dãy biến ngẫu nhiên E -giá trị $\{X_k; 1 \le k \le n\}$ ta đều có

$$E \max_{1\le k\le n} \| \sum_{i=1}^{k} X_i \|^p \le C \sum_{i=1}^{n} E \| X_i \|^p .$$

Dễ dàng thấy rằng mọi không gian Banach khả ly, thực đều là không gian 1-trơn đều, tập số thực với chuẩn giá trị tuyệt đối là không gian 2-trơn đều. Nếu E là không gian p-trơn đều với $1 < p \le 2$ thì E là không gian r-trơn đều với $1 \le r \le p$. Các tính chất của không gian p-trơn đều có thể tìm đọc trong tài liệu tham khảo [2].

Bổ đề sau được cung cấp bởi Dung [1].

1.1.1. ***Bổ đề****. Cho* $1 \le p \le 2$ *và E là không gian Banach p-trơn đều. Cho* $\{X_{kl}; 1 \le k \le m, 1 \le l \le n\}$ *là mảng các biến ngẫu nhiên E -giá trị thỏa mãn điều kiện* $E(X_{kl} \mid \mathcal{F}_{kl}) = 0$ *với mọi* $1 \le k \le m, 1 \le l \le n$ *với* $\mathcal{F}_{kl}$ *là* σ *- đại số sinh bởi các đại lượng ngẫu nhiên* $\{X_{ij} : i < k \text{ hoặc } j < l\}$, $\mathcal{F}_{1,1} = \{\Omega, \varnothing\}$. *Khi đó,*

$$E \max_{k\le m, l\le n} \| S_{kl} \|^p \le C \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} E \| X_{kl} \|^p$$

trong đó $S_{kl} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} X_{ij}$.

Trong các kết quả sau đây chúng tôi xét $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian xác suất đầy đủ, E là không gian p-trơn đều với $1 \le p \le 2$; $\{X_{ij}; i \ge 1, j \ge 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên E -giá trị, $\{u_m; m \ge 1\}, \{v_n; n \ge 1\}$ là 2 dãy các số nguyên dương thỏa mãn $\lim_{m\to\infty} u_m = \lim_{n\to\infty} v_n = \infty$ và $\{a_{mnij}; m \ge 1, n \ge 1, 1 \le i \le u_m, 1 \le j \le v_n\}$ là mảng các hằng số thực.

1.1.2. **Định lí**. *Nếu tồn tại mảng các hằng số dương* $\{c_{mnij}; m \ge 1, n \ge 1, 1 \le i \le u_m, 1 \le j \le v_n\}$ *sao cho*

$$\sum_{i=1}^{u_m} \sum_{j=1}^{v_n} c_{mnij}^p \, | a_{mnij} |^p \to 0 \text{ khi } n \vee m \to \infty \text{ và} \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{u_m} \sum_{j=1}^{v_n} | a_{mnij} |^p \, E \| X_{ij} I(\| X_{ij} \| > c_{mnij}) \|^p \to 0 \text{ khi } n \vee m \to \infty. \tag{2.2}$$

Khi đó,

$$\max_{\substack{1\le k\le u_m \\ 1\le l\le v_n}} \left\| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_{mnij} X_{ij} \right\| \xrightarrow{L_p} 0 \text{ khi } n \vee m \to \infty.$$

Và do đó, ta thu được luật yếu số lớn

$$\sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n} a_{mnij}X_{ij} \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n\vee m\to\infty.$$

Chứng minh.

$$E\max_{\substack{1\le k\le u_m\\ 1\le l\le v_n}}\left\|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} a_{mnij}X_{ij}\right\|^p \le C\sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n} E\| a_{mnij}X_{ij}\|^p \text{ (do Bổ đề 2.1.1)}$$

$$= C\sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n}|a_{mnij}|^p E\| X_{ij}\|^p$$

$$= C\sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n}|a_{mnij}|^p E\| X_{ij}I(\| X_{ij}\|\le c_{mnij})\|^p + C\sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n}|a_{mnij}|^p E\| X_{ij}I(\| X_{ij}\|> c_{mnij})\|^p$$

$$\le C\sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n}c_{mnij}^p|a_{mnij}|^p + C\sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n}|a_{mnij}|^p E\| X_{ij}I(\| X_{ij}\|> c_{mnij})\|^p \to 0 \text{ khi } n\vee m\to\infty.$$

Bây giờ với mọi $\varepsilon>0$, áp dụng bất đẳng thức Markov ta có

$$P\left(\left\|\sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n} a_{mnij}X_{ij}\right\|>\varepsilon\right)\le \frac{1}{\varepsilon^p}E\left\|\sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n} a_{mnij}X_{ij}\right\|^p$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^p}E\max_{\substack{1\le k\le u_m\\ 1\le l\le v_n}}\left\|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} a_{mnij}X_{ij}\right\|^p \to 0 \text{ khi } n\vee m\to\infty.$$

Định lí được chứng minh. □

1.1.3. **Định lí**. *Cho* $\{T_n; n\ge 1\}$ *và* $\{\tau_n, n\ge 1\}$ *là hai dãy các đại lượng ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với* $\{X_{ij}; i\ge m, j\ge n\}$, *thỏa mãn điều kiện*

$$\lim_{n\to\infty}P\{T_n>u_n\}=\lim_{n\to\infty}P\{\tau_n>v_n\}=0. \qquad (2.3)$$

Nếu tồn tại mảng các hằng số dương $\{c_{mnij};\ m\ge 1,\ n\ge 1,\ 1\le i\le u_m,\ 1\le j\le v_n\}$ *sao cho (2.1) và (2.2) thỏa mãn và tồn tại các số nguyên dương* m_0, n_0 *sao cho*

$$M=\sup_{m\ge m_0, n\ge n_0}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_{mnij}^p|a_{nmij}|^p<\infty \text{ và}$$

$$N=\sup_{m\ge m_0, n\ge n_0}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{mnij}|^p E\| X_{ij}I(\| X_{ij}\|>c_{mnij})\|^p<\infty.$$

Khi đó,

$$\left\|\sum_{i=1}^{T_m}\sum_{j=1}^{\tau_n} a_{mnij}X_{ij}\right\| \xrightarrow{L_p} 0 \text{ khi } n\wedge m\to\infty. \qquad (2.4)$$

Và do đó thu được luật yếu số lớn

$$\sum_{i=1}^{T_m}\sum_{j=1}^{\tau_n} a_{mnij} X_{ij} \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \wedge m \to \infty.$$

Chứng minh. Đặt $B_{mnkl} = \{T_m = k, \tau_n = l\}$, $p_{mnkl} = P(B_{mnkl})$, ta có

$\sum_{i=1}^{T_m}\sum_{j=1}^{\tau_n} a_{mnij} X_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} a_{mnij} X_{ij}\right) I(B_{mnkl}).$ Vì vậy

$$E\left\|\sum_{i=1}^{T_m}\sum_{j=1}^{\tau_n} a_{mnij} X_{ij}\right\|^p = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} E\left(\left\|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} a_{mnij} X_{ij}\right\|^p I(B_{mnkl})\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} p_{mnkl} E\left\|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} a_{mnij} X_{ij}\right\|^p \le C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} p_{mnkl}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} E\left\|a_{mnij} X_{ij}\right\|^p \text{ (do Bổ đề 2.1.1)}$$

$$= C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} p_{mnkl}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} E\left\|a_{mnij} X_{ij} I(\|X_{ij}\| \le c_{mnij})\right\|^p$$

$$+ C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} p_{mnkl}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} E\left\|a_{mnij} X_{ij} I(\|X_{ij}\| > c_{mnij})\right\|^p$$

$$= C.K_{mn} + C.L_{mn}.$$

Để chứng minh kết luận (2.4) ta sẽ chứng minh $K_{mn} \to 0$ và $L_{mn} \to 0$ khi $m \wedge n \to \infty$. Trước hết ta có

$$K_{mn} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} p_{mnkl}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} E\left\|a_{mnij} X_{ij} I(\|X_{ij}\| \le c_{mnij})\right\|^p$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} p_{mnkl}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} c_{mnij}^p |a_{mnij}|^p$$

$$= \sum_{k=1}^{u_m}\sum_{l=1}^{v_n} p_{mnkl}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} c_{mnij}^p |a_{mnij}|^p + \sum_{k=u_m+1}^{\infty}\sum_{l=v_n+1}^{\infty} p_{mnkl}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} c_{mnnij}^p |a_{mnij}|^p$$

$$+ \sum_{k=1}^{u_m}\sum_{l=v_n+1}^{\infty} p_{mnkl}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} c_{mnij}^p |a_{mnij}|^p + \sum_{k=u_m+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{v_n} p_{mnkl}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} c_{mnij}^p |a_{mnij}|^p$$

$$= \sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n} c_{mnij}^p |a_{mnij}|^p P\{i \le T_m \le u_m, j \le \tau_n \le v_n\}$$

$$+ M\sum_{k=u_m+1}^{\infty}\sum_{l=v_n+1}^{\infty} p_{mnkl} + M\sum_{k=1}^{u_m}\sum_{l=v_n+1}^{\infty} p_{mnkl} + M\sum_{k=u_m+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{v_n} p_{mnkl}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n} c_{mnij}^p \,|\, a_{mnij} \,|^p + M\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=v_n+1}^{\infty} p_{mnkl} + M\sum_{k=u_m+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{v_n} p_{mnkl}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n} c_{mnij}^p \,|\, a_{mnij} \,|^p + MP\{\tau_n > v_n\} + MP\{T_m > u_m\} \to 0 \text{ khi } n \wedge m \to \infty$$

(do (2.1) và (2.3)).

Biến đổi tương tự ta cũng có

$$L_{mn} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} p_{mnkl} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} E\left\| a_{mnij} X_{ij} I(\| X_{ij} \| > c_{mnij}) \right\|^p$$

$$= \sum_{k=1}^{u_m}\sum_{l=1}^{v_n} p_{mnkl} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} E\left\| a_{mnij} X_{ij} I(\| X_{ij} \| > c_{mnij}) \right\|^p$$

$$+ \sum_{k=u_m+1}^{\infty}\sum_{l=v_n+1}^{\infty} p_{mnkl} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} E\left\| a_{mnij} X_{ij} I(\| X_{ij} \| > c_{mnij}) \right\|^p$$

$$+ \sum_{k=1}^{u_m}\sum_{l=v_n+1}^{\infty} p_{mnkl} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} E\left\| a_{mnij} X_{ij} I(\| X_{ij} \| > c_{mnij}) \right\|^p$$

$$+ \sum_{k=u_m+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{v_n} p_{mnkl} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} E\left\| a_{mnij} X_{ij} I(\| X_{ij} \| > c_{mnij}) \right\|^p$$

$$\leq \sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n} E\left\| a_{mnij} X_{ij} I(\| X_{ij} \| > c_{mnij}) \right\|^p P\{i \leq T_m \leq u_m, j \leq \tau_n \leq v_n\}$$

$$+ N\sum_{k=u_m+1}^{\infty}\sum_{l=v_n+1}^{\infty} p_{mnkl} + N\sum_{k=1}^{u_m}\sum_{l=v_n+1}^{\infty} p_{mnkl} + N\sum_{k=u_m+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{v_n} p_{mnkl}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n} E\left\| a_{mnij} X_{ij} I(\| X_{ij} \| > c_{mnij}) \right\|^p + N\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=v_n+1}^{\infty} p_{mnkl} + N\sum_{k=u_m+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{v_n} p_{mnkl}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{u_m}\sum_{j=1}^{v_n} E\left\| a_{mnij} X_{ij} I(\| X_{ij} \| > c_{mnij}) \right\|^p + NP\{\tau_n > v_n\} + NP\{T_m > u_m\}$$

$\to 0$ khi $n \wedge m \to \infty$ (do (2.2) và (2.3)).

Bây giờ với mọi $\varepsilon > 0,$ áp dụng bất đẳng thức Markov ta có

$$P\left(\left\| \sum_{i=1}^{T_m}\sum_{j=1}^{\tau_n} a_{mnij} X_{ij} \right\| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} E\left\| \sum_{i=1}^{T_m}\sum_{j=1}^{\tau_n} a_{mnij} X_{ij} \right\|^p \to 0 \text{ khi } n \vee m \to \infty.$$

Định lí được chứng minh. □

3. Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi đã thu được các kết quả mới về hội tụ theo trung bình đối với mảng các biến ngẫu nhiên $\mathbb{E}$-giá trị với chỉ ngẫu nhiên và không ngẫu nhiên. Các kết quả này được thể hiện ở Định lí 2.1.2 và Định lí 2.1.3.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Dung V. Le, "Weak laws of large numbers for double arrays of random elements in Banach spaces", *Acta Mathematica Vietnamica*, **35** (3), , 2010, 387-398.

[2] Pisier, G., "Martingales with values in uniformly convex spaces", Israel J. Math., **20** (3-4) , 1975, 326-350.

[3] Rosalsky, A., Sreehari, M., Volodin, A. I., "Mean convergence theorems with or without random indices for randomly weighted sums of random elements in Rademacher type p Banach spaces", *Stochastic Analysis and Application*, **21**, 2003, 1169-1187.

[4] Scalora, F. S., "Abstract martingale convergence theorems", *Pacific J. Math*., **11**, 1961, 347-374.

MEAN CONVERGENCE THEOREMS FOR ARRAYS OF BANACH-VALUED RANDOM VARIABLES

Le Van Dung, Ton That Tu

Faculty of Mathematics, The University of Danang, University of Science and Education

ABSTRACT

Given a double array of E-valued random variables $\{X_{ij}; i \geq m, j \geq n\}$, $\{a_{mnij}; m \geq 1, n \geq 1, 1 \leq i \leq u_m, 1 \leq j \leq v_n\}$ which is an array of real constants, in this paper we establish sufficient conditions for mean convergence without random indices $\max\limits_{\substack{1\leq k\leq u_m \\ 1\leq l\leq v_n}} \left\| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_{mnij} X_{ij} \right\| \xrightarrow{L_p} 0$ as $n \vee m \to \infty$ and mean convergence with random indices $\left\| \sum_{i=1}^{T_m} \sum_{j=1}^{\tau_n} a_{mnij} X_{ij} \right\| \xrightarrow{L_p} 0$ as $n \wedge m \to \infty$, where $\{T_m, m \geq 1\}$ and $\{\tau_n, n \geq 1\}$ are sequences of positive integer valued random variables, $\{u_n; n \geq 1\}, \{v_n; n \geq 1\}$ are sequences of positive integers satisfying $\lim\limits_{m\to\infty} u_m = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \infty$. These results are based on the extension of theorems 1 and 2 by Rosalsky and other theorems by other authors [3]. Moreover, from the results of mean convergence, by using Markov inequality, we easily obtain weak laws of large numbers for arrays of E-valued random variables.

Keywords: Mean convergence; two-dimensional arrays; E-valued random variables; Random Variables; Weak laws of large numbers.

*Lê Văn Dũng, Email: lvdunght@gmail.com, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, ĐHĐN.

Tôn Thất Tú, Email: tthattu@gmail.comKhoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, ĐHĐN,