VÀNH MÀ MỘT LỚP MÔĐUN NHÚNG ĐƯỢC VÀO MÔĐUN XẠ ẢNH

Bành Đức Dũng*

TÓM TẮT

Năm 1967, Faith và Walker có định lý đặc trưng vành quasi-Frobenius nổi tiếng, đó là vành R là quasi-Frobenius nếu và chỉ nếu mọi R-môđun phải nội xạ là xạ ảnh. Từ đó suy ra rằng nếu mọi R-môđun phải đều nhúng được vào một R-môđun phải xạ ảnh, hoặc một cách tương đương nhúng vào một R-môđun tự do, thì R là vành quasi-Frobenius. Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là, nếu không phải mọi môđun nhúng được mà chỉ một lớp môđun nào đó thì vành R sẽ như thế nào? Vành mà mọi môđun phải hữu hạn sinh (tương ứng, mọi môđun cyclic) nhúng được vào một môđun tự do được gọi là FGF phải (tương ứng CF phải). Hai câu hỏi vẫn còn mở cho đến nay đó là:

(1) Vành FGF phải có là QF?

(2) Vành CF phải có là artin phải?

Câu hỏi (1) và (2) này lần lượt được gọi là **Giả thuyết FGF** và **Giả thuyết CF**. Nếu giả thuyết CF được giải quyết thì giả thuyết FGF cũng được giải quyết do một vành artin phải, FGF phải là QF. Từ khi Faith đặt tên cho các lớp vành này đến nay, đã có rất nhiều công trình của rất nhiều tác giả cho những câu trả lời tiệm cận. Trong bài viết này chúng tôi giới thiệu một cách tổng quan các kết quả đạt được về các lớp vành này và một số câu hỏi mở.

Từ khóa: CF vành, FGF vành, QF vành

1. Giới thiệu

Trong bài viết này, vành R đã cho luôn được giả thiết là vành kết hợp có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi R-môđun được xét là môđun unita. Những khái niệm và kết quả cơ bản chúng ta có thể tham khảo trong F.W. Anderson and K.R. Fuller [1], C. Faith [4], T.Y. Lam [12], W. K. Nicholson and M. F. Yousif [15].

Với vành R đã cho, ta viết M_R $({}_RM)$ để chỉ M là một R-môđun phải (trái, tương ứng). Khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, để đơn giản ta viết môđun M thay vì M_R. Chúng ta dùng các ký hiệu $A_R \leq M_R (A_R \leq^e M_R, A_R = M_R)$ để chỉ A là môđun con (tương ứng, môđun con cốt yếu, đối cốt yếu) của M; căn Jacobson, đế của môđun M_R được ký hiệu tương ứng là $\mathrm{Rad}(M_R), \mathrm{Soc}(M_R)$; $J(R)$ được dùng để ký hiệu cho căn Jacobson của vành R.

Vành R được gọi là *nội xạ chính phải* (hoặc *P-nội xạ phải*) nếu mọi iđêan phải chính của R là mở rộng được. Do đó, mọi vành tự nội xạ phải là P-nội xạ phải. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng, chẳng hạn, mọi vành chính qui là nội xạ chính cả hai phía. Một môđun Q_R được gọi là *FP-nội xạ* nếu với mọi đồng cấu từ một môđun con hữu hạn sinh K của một R-môđun phải tự do F vào Q_R đều có thể mở rộng lên toàn F_R. Rõ ràng, mọi môđun nội xạ là FP-nội xạ. Nếu R là vành chính quy, mọi R-môđun phải là FP-nội xạ vì mọi môđun con hữu hạn sinh của một môđun tự do là một hạng tử trực tiếp (theo [15, Theorem B.54 và Corollary B.49]).

Vành R được gọi là *CS phải* nếu mọi iđêan phải đều cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của R, và được gọi là *C2 phải* nếu mọi iđêan phải đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp thì tự nó cũng là hạng tử trực tiếp. Nếu vành R vừa là CS phải, vừa là C2 phải thì ta gọi R là *vành liên tục phải*. Rõ ràng đây đều là các lớp vành mở rộng của lớp vành tự nội xạ phải. Một vành được gọi là *C2 mạnh phải* nếu $M_n(R),\ n \geq 1$, là C2 phải.

Một vành R được gọi là *Kasch phải* nếu mọi môđun phải đơn K nhúng được vào R_R, hoặc một cách tương đương nếu R_R đối sinh ra K. Một vành được gọi là *psuedo-Frobenius phải* (viết tắt là PF) nếu nó là tự nội xạ phải, nửa hoàn chỉnh và có đế phải cốt yếu, hoặc một cách tương đương, là vành tự nội xạ phải và có đế phải hữu hạn sinh cốt yếu. Vành R được gọi là *quasi-Frobenius* (viết tắt là QF) nếu nó là vành artin hai phía, tự nội xạ hai phía.

2. Các kết quả về các lớp vành FGF và CF

Kết quả đầu tiên chúng tôi giới thiệu ở đây thuộc về Faith (1967), mọi vành CF hai phía là QF.

Định lý 1 (Faith -Walker, 1967). Một vành là QF nếu và chỉ nếu mọi môđun trái cyclic và mọi môđun phải cyclic nhúng được vào một môđun xạ ảnh.

Tiếp đó là kết quả thuộc về Björk (1969) và Tolskaya (1970) kết hợp điều kiện FGF với điều kiện vành tự nội xạ cùng phía.

Định lý 2 (Björk, Tolskaya). Mọi vành tự nội xạ phải FGF phải là QF.

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng tồn tại một vành CF trái nhưng không là FGF trái, và do nó không phải là QF nên theo định lý trên nó cũng không là CF phải.

Ví dụ 3 (Björk**).** Giả sử *F* là một trường có trường con thực sự $\bar{F}$ và $a \mapsto \bar{a}$ là một đẳng cấu từ *F* lên $\bar{F}$. Lấy *R* là không gian véctơ với cơ sở $\{1, t\}$ và xem *R* như là một *F* - đại số bởi định nghĩa $t^2 = 0$ và $ta = \bar{a}t$ với mọi $a \in F$. Khi đó các *R*-môđun trái cyclic chỉ là 0, *R* và $R/J \cong J$. Do mỗi một trong chúng là nhúng được vào ${}_R R$ nên *R* là CF trái. Nhưng do *R* không tự nội xạ trái (thậm chí cũng không nội xạ bé bên trái) nên *R* không là QF, do đó cũng không FGF trái. Cũng do *R* không là QF nên *R* không phải là CF phải (xem [15, Example 2.5 và Example 7.3]).

Bằng cách thêm vào các điều kiện dây chuyền, Faith (1983) có một số kết quả như sau: Trước hết ông chứng minh cho trường hợp điều kiện FGF kết hợp với điều kiện Artin cùng phía.

Định lý 4 (Faith, 1983). Nếu *R* là vành artin phải, FGF phải thì *R* là QF.

Từ đó ta dễ dàng suy ra các kết quả:

Hệ quả 5. Cho R là một vành FGF phải. Khi đó R là QF nếu một trong các điều kiện sau đây xảy ra:

1. R thỏa mãn DCC trên các iđêan linh hóa tử phải;
2. R thỏa mãn ACC trên các iđêan linh hóa tử trái;
3. R là vành Noether trái;
4. R là vành Artin trái.

Tiếp đó, Faith đã kết hợp điều kiện FGF phải với điều kiện vành có đế phải hữu hạn sinh cốt yếu:

Định lý 6 (Faith, 1983). Nếu R là vành FGF phải và có đế phải hữu hạn sinh cốt yếu thì R là QF.

Từ đó ông suy ra được kết quả

Định lý 7 (Faith, 1983). Mọi vành Noether phải FGF phải là QF.

Kết quả sau đây thuộc về Nicholson và Yousif (2003) cho một cách tiếp cận khác bằng cách giảm tính chất FGF xuống 2-GF và tính chất C2-mạnh:

Định lý 8. Giả sử R là vành C2 mạnh phải sao cho mọi R-môđun phải 2-sinh nhúng được vào một môđun tự do (còn ký hiệu là 2-GF). Khi đó R là QF.

Những điều kiện trong hệ quả sau đây đều suy ra tính chất C2 mạnh.

Hệ quả 9. Giả sử vành R có tính chất là mọi R-môđun phải 2-sinh nhúng được vào một môđun tự do. Khi đó R là QF nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

1. $\boldsymbol{R}$ là nửa chính quy với $J = Z_r$.
2. R là Kasch trái.
3. R là nửa hoàn chỉnh với $\mathrm{Soc}(eR) \neq 0$ với mọi lũy đẳng địa phương $e^2 = e \in R$ (chẳng hạn R là vành hoàn chỉnh phải).
4. R là FP-nội xạ phải.

Kết quả sau đây mở rộng kết quả của Björk -Tolskaya nêu trên:

Định lý 10 (Gómes Pardo-Guil Asensio, 1997). Mọi vành CS phải CF phải là artin phải. Đặc biệt, mọi vành CS phải, FGF phải là QF.

Theo một hướng mở rộng khác, Rada và Saorín (1997) cũng có được kết quả

Định lý 11. Giả sử R là vành FGF phải sao cho $R / J(R)$ là chính quy và $J(R)$ là T-lũy linh phải. Khi đó R là QF.

Đặc biệt, khi nghiên cứu các vành CF một phía và nửa hoàn chỉnh (1999), họ cũng chỉ ra rằng một vành hoàn chỉnh trái CF phải là Artin phải. Do đó:

Định lý 12. Cho R là vành FGF phải hoàn chỉnh trái. Khi đó, R là QF.

Chen và Li (2004) mở rộng các kết quả này như sau:

Định lý 13. Mọi vành CF phải, C2 mạnh phải là artin phải. Mọi vành CF phải, hoàn chỉnh trái là artin phải.

Theo một hướng khác, năm 1983 Menal có kết quả đặc trưng vành QF qua tính chất CF một phía:

Định lý 14. Một vành CF phải và $E(R_R)$ là xạ ảnh là vành QF.

Sau đó, Pardo và Asensio (1997) đã mở rộng tính chất này như sau:

Định lý 15. Cho R là một vành, kí hiệu $E = E(R_R)$ và $S = \mathrm{End}(E)$, $J = J(S)$. Nếu R là *CF* phải E/JE là hữu hạn sinh thì R là Artin phải.

Quan hệ mật thiết với lớp vành CF là các vành CEP: vành R được gọi là *CEP phải* nếu mọi R-môđun cyclic có thể nhúng cốt yếu vào một môđun xạ ảnh. Vào năm 1990, Jain và López-Permouth đã chứng minh một vành nửa hoàn chỉnh, CEP phải là artin phải (thực tế là kết quả này về sau được Pardo và Asensio chứng minh không cần điều kiện nửa hoàn chỉnh) và đưa ra một số kết quả:

Định lý 16. Với một vành R bất kỳ, các điều kiện sau là tương đương:

1. R là QF.
2. R là CEP phải và $E(R_R)$ là xạ ảnh.
3. Bao nội xạ của mỗi R-môđun phải cyclic là xạ ảnh.

Năm 1997, Pardo và Asensio đã chứng minh:

Định lý 17. Một vành CEP phải là artin phải. Do đó, vành mà mọi môđun phải hữu hạn sinh nhúng được cốt yếu và một môđun tự do là QF.

Giả sử P là một tính chất của vành. Vành R được gọi là *P đầy đủ* nếu mọi môđun thương của R cũng có tính chất P. Năm 2002, Faith và Huỳnh có kết quả:

Định lý 18. Với một vành R các điều kiện sau đây là tương đương:

(1) R là QF đầy đủ.

(2) R là FGF phải đầy đủ.

Năm 1983, Menal đặt câu hỏi rằng: Có tồn tại hay không một bản số vô hạn c sao cho nếu mọi R-môđun phải c-sinh nhúng được vào một môđun tự do thì R là QF. Menal phỏng đoán câu trả lời là không, cụ thể là: "Có một vành R sao cho mọi R-môđun phải đếm được sinh nhúng được vào một môđun tự do nhưng R không là QF". Năm 1997, Pardo và Asensio đã trả lời một phần câu hỏi này:

Định lý 19. Nếu R là một vành sao cho mọi môđun thương của $R_R^{(R)}$ nhúng được vào một môđun tự do thì R là QF.

Như vậy, giả thuyết của Menal đã được trả lời trong trường hợp $c \geq |R|$, câu hỏi vẫn còn mở trong trường hợp $c < |R|$.

Những câu hỏi trên đây là những câu hỏi lớn và cũng đã hơn mười năm trở lại đây chưa có thêm những kết quả tốt hơn. Chúng tôi tổng hợp sau đây là một số câu hỏi liên quan khác:

1. Bản số *c* nhỏ nhất là bao nhiêu để đảm bảo rằng nếu mọi *R*-mođun có lực lượng nhỏ hơn hoặc bằng *c* nhúng được vào một môđun tự do thì *R* là QF?

2. Một vành FGF phải, tự nội xạ phải là QF. Nếu điều kiện tự nội xạ phải được thay bằng C2 mạnh phải thì kết quả vẫn đúng. Vậy nếu chỉ cần điều kiện C2 phải thì kết quả này có còn đúng? Có thể thay thế điều kiện tự nội xạ bởi điều kiện suy rộng khác được không, chẳng hạn như P-nội xạ, nội xạ đơn,…

3. Nếu bao nội xạ của mỗi *R*-môđun cyclic là xạ ảnh thì *R* là QF. Nếu *R* là nửa hoàn chỉnh và bao nội xạ của mỗi *R*-môđun phải đơn là xạ ảnh thì *R* là PF phải (Dung-Thoang-Sanh, 2008). Thực tế thì vành PF một phía có thể được đặc trưng qua lớp môđun nào được nhúng, hoặc đặc trưng qua bao nội xạ của lớp môđun nào là xạ ảnh?

4. Nếu lớp các R-môđun đơn nhúng (cốt yếu) được vào một môđun tự do thì R là vành có những tính chất gì, chẳng hạn, có là nửa hoàn chỉnh?

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] F. W. Anderson and K. R. Fuller (1992), *Rings and categories of modules*, Second Edition, Graduate Text in Math., Vol. **13**, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

[2] B. Bj&rk (1969), *Rings satisfying a minimal condition on principal ideals*, J. Reine Angew. Math., **236**, 112-119.

[3] Dung, B. D., Thoang, L. D., Sanh, N. V. (2008), *When is a semiperfect rings pseudo-Frobenius*?, Asian J. of Math., **1** (3), 353-358.

[4] C. Faith (1976), Algebra II: Ring Theory, Grundl. Math. Wiss. **191**, Springer-Verlag.

[5] C. Faith (1982), *Embedding modules in projectives. A report on a problem*, Lecture Notes in Mathematics Vol. **951**, 21-40. Springer-Verlag, Berlin-New York.

[6] C. Faith (1990), *Embedding torsionless modules in projectives. A report on a problem,* Lecture Notes, Inst. de Recerca Mat., Autonoma U. de Barcelona.

[7] C. Faith and D.V. Huynh (2002), *When self-injective rings are QF: A report on a*

problem, J. Algebra Appl. 1, 75-105.

[8] C. Faith and E. A. Walker (1967), *Direct-sum representations of injective modules*, J. Algebra 5, 203-221.

[9] J. L. Gómez Pardo (1985), *Embedding cyclic and torsionfree modules in free modules*, Arch. Math. 44, 503-510.

[10] J. L. Gómez Pardo and P. A. Guil Asensio (1997), *Rings with finite essential socle*, Proc. Am. Math. Soc. 125, 971-977.

[11] J. L.Gómez Pardo and P. A. Guil Asensio (1997), *Essential embeddings of cyclic modules in projectives*, Trans. Am. Math. Soc. 349, 4343-4353.

[12] T. Y. Lam (1991), A First Course in Noncommutative Rings, Graduate Text in Math., Vol. **131**, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

[13] L. Levy (1963), *Torsion-free and divisible modules over non-integral-domains*, Canadian J. Math. 15, 132-151.

[14] P. Menal (1983), *On the endomorphism ring of a free module*, Publ. Mat. Univ. Autónoma Barcelona 27, 141-154.

[15] W. K. Nicholson and M. F. Yousif (2003), Quasi-Frobenius rings, Cambridge Univ. Press.

[16] B. Osofsky (1966), *A generalization of quasi-Frobenius rings*, J. Algebra 4, 373-387.

[17] T. S.Tolskaya (1970), *When are all cyclic modules essentially embedded in free modules*?, Mat. Issled. 5, 187-192.

THE RING WHOSE MODULE CLASS IS EMBEDDED IN PROJECTIVE MODULE

Banh Duc Dung

Ho Chi Minh University of Transport

ABSTRACT

Faith and Walker (1967) characterized QF rings as the class of rings if and if every right injective module is projective. It can be implied that if every right *R*-module is embedded in a projective module or, equivalently, in a free module, then *R* is QF. The question is if not all the module but a class of it is embedded, how the ring R is. The ring of which every finitely generated (cyclic) right *R*-module is embedded in a free module is called right FGF (resp. CF). There have been two conjectures:

Right FGF ring is QF (FGF’s conjecture)?

Right CF ring is artinian (CF’s conjecture)?

If the CF’s conjecture is true, then so is FGF’s conjecture because a right artinian and FGF ring are QF. In this paper, we introduce these problems generally and then pose some open questions.

Key words: CF Ring, FGF Ring, QF Ring

* TS. Bành Đức Dũng, Email: banhducdung@yahoo.com, ĐH GTVT Tp. Hồ Chí Minh.