

SẮC SỐ, ĐA THỨC TÔ MÀU VÀ TÍNH DUY NHẤT TÔ MÀU CỦA ĐỒ THỊ TÁCH CỤC

CHROMATIC NUMBER, CHROMATIC POLYNOMIALS AND CHROMATIC UNIQUENESS OF
SPLIT GRAPHS

Lê Xuân Hùng

Trường Đại học Tài nguyên Hà Nội

Email: lxhung@hunre.edu.vn

TÓM TẮT

Khái niệm đồ thị tách cực được định nghĩa vào năm 1977 bởi S. Foldes và P.L. Hammer. Các đồ thị này đã và đang được nghiên cứu nhiều bởi vì chúng có liên quan các vấn đề tổ hợp và khoa học máy tính như bài toán đóng gói và xếp ba lô trong quy hoạch nguyên, lý thuyết matroid, nghiên cứu hàm Boolean, giải quyết việc xử lý song song trong các chương trình máy tính và xác định công việc trong hệ phân tán,... Một trong những vấn đề chủ yếu trong lý thuyết đồ thị là bài toán tô màu đồ thị. Đặc biệt là xác định sắc số, đa thức tô màu và nghiên cứu tính duy nhất tô màu của đồ thị. Trong bài báo này chúng ta sẽ xác định sắc số, đa thức tô màu và nghiên cứu tính duy nhất tô màu của đồ thị tách cực.

Từ khóa: đồ thị tách cực; tô màu đỉnh (tô màu); sắc số; đa thức tô màu; đồ thị duy nhất tô màu.

ABSTRACT

The notion of split graphs was introduced in 1977 by S. Foldes and P.L. Hammer. These graphs have been extensively studied because they are in connection with combinatorial problems and computer science such as packing and knapsack problems, the matroid theory, Boolean function, the analysis of parallel processes of computer programs and the task allocation of distributed systems... One of the fundamental matters in graph theory is the graph coloring, especially the determination of chromatic number, chromatic polynomials, and the uniqueness of graph coloring. This paper determines the chromatic number, chromatic polynomials and chromatical uniqueness of split graphs.

Key words: split graph; vertex colorings (colorings); chromatic number; chromatic polynomials; chromatically unique graph.

1. Giới thiệu

Tất cả các đồ thị được nói tới trong bài báo này là những đơn đồ thị hữu hạn, vô hướng, không có khuyên và không có cạnh bội. Nếu G là một đồ thị, thì $V(G)$ (hoặc V) được gọi là *tập đỉnh* và $E(G)$ (hoặc E) được gọi là *tập cạnh*. Tập hợp tất cả các đỉnh là hàng xóm của tập con $S \subseteq V(G)$ được ký hiệu là $N_G(S)$ (hoặc $N(S)$). Với mỗi đỉnh $v \in V(G)$, ta gọi $|N_G(v)|$ là bậc của đỉnh v , ký hiệu là $\deg_G(v)$ (hoặc $\deg(v)$). Đồ thị con của G cảm sinh trên tập $U \subseteq V(G)$ được ký hiệu là $G[U]$. *Đồ thị rỗng cấp n* và *đồ thị đầy đủ cấp n* lần lượt được ký hiệu là O_n và K_n . Ngoài ra, một số khái niệm và ký hiệu khác được định nghĩa

trong [1].

Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *đồ thị tách cực* nếu tồn tại một phân hoạch $V = I \cup K$ sao cho đồ thị con $G[I]$ là đồ thị rỗng và đồ thị con $G[K]$ là đồ thị đầy đủ. Chúng ta ký hiệu đồ thị tách cực là $S(I \cup K, E)$. Khái niệm đồ thị tách cực được định nghĩa đầu tiên vào năm 1977 bởi Foldes và Hammer [11]. Các đồ thị này đã và đang được nghiên cứu nhiều bởi vì chúng có liên quan nhiều đến các vấn đề về tổ hợp và khoa học máy tính như bài toán đóng gói và xếp ba lô trong quy hoạch nguyên [5], lý thuyết matroid [7], nghiên cứu hàm Boolean [12], giải quyết việc xử lý song song trong các chương trình máy tính [8] và xác định công việc trong hệ phân tán [9],...

Giả sử G là một đồ thị và λ là một số

nguyên dương. Một ánh xạ $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ được gọi là λ -tô màu (λ -coloring) của đồ thị G nếu với mỗi cặp đỉnh u, v kề nhau trong G ta luôn có $f(u) \neq f(v)$. Số λ nhỏ nhất để đồ thị G có λ -tô màu được gọi là *sắc số* của đồ thị G và được ký hiệu là $\chi(G)$. Đồ thị G được gọi là k -sắc nếu $\chi(G) = k$ và được gọi là r -tới hạn nếu $\chi(G) = r$ và $\chi(H) < \chi(G)$ với mọi H là đồ thị con thực sự của G .

Hai λ -tô màu f và g của đồ thị G được gọi là khác nhau nếu tồn tại $u \in V(G)$ sao cho $f(u) \neq g(u)$. Ta ký hiệu $P(G, \lambda)$ (hoặc $P(G)$) là số tất cả các λ -tô màu khác nhau của đồ thị G . Người ta đã chứng minh được rằng với mọi đồ thị G , $P(G, \lambda)$ là một đa thức của λ . Đa thức này được gọi là *đa thức tô màu* của G . Khái niệm đa thức tô màu được đưa ra đầu tiên vào năm 1912 bởi Birkhoff [2] khi ông cố gắng tìm kiếm lời giải bài toán bốn màu. Đến nay đã thu được nhiều kết quả sâu sắc.

Hai đồ thị G và G' được gọi là *tương đương tô màu* hay χ -tương đương nếu $P(G, \lambda) = P(G', \lambda)$.

Đồ thị G được gọi là *duy nhất tô màu* hay χ -*duy nhất* nếu với mọi đồ thị G' tương đương tô màu với G ta đều có G và G' đẳng cấu với nhau. Như vậy, cấu trúc của đồ thị duy nhất tô màu G được xác định hoàn toàn bởi đa thức tô màu $P(G, \lambda)$.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lý thuyết

Trước hết là một số kết quả đã biết về đồ thị r -tới hạn.

Định lý 1 ([3]). (i) Mọi đồ thị r -sắc đều chứa đồ thị con r -tới hạn.

(ii) Nếu H là đồ thị r -tới hạn và H không là đồ thị đầy đủ, thì $|V(H)| \geq r + 2$.

Đồ thị G được gọi là *đồ thị liên thông* nếu

giữa hai đỉnh bất kỳ của G đều tồn tại một đường đi. Đồ thị G được gọi là k -liên thông ($k \geq 2$) nếu hoặc G là đồ thị đầy đủ K_{k+1} , hoặc G có ít nhất $k + 2$ đỉnh và không có bất kỳ tập nào gồm $k - 1$ đỉnh tách được nó. Tiếp theo là một số kết quả đã biết về các đồ thị tương đương tô màu.

Định lý 2 ([13]). Giả sử G và H là hai đồ thị tương đương tô màu. Khi đó

$$(i) \quad |V(G)| = |V(H)|;$$

$$(ii) \quad |E(G)| = |E(H)|;$$

$$(iii) \quad \chi(G) = \chi(H);$$

(iv) G là liên thông khi và chỉ khi H là liên thông;

(v) G là 2-liên thông khi và chỉ khi H là 2-liên thông.

Đồ thị liên thông χ -duy nhất H được gọi là χ -*duy nhất yếu* nếu đồ thị $H \cup O_1$ không phải là χ -duy nhất. Đồ thị liên thông χ -duy nhất H được gọi là χ -*duy nhất mạnh* nếu đồ thị $H \cup O_1$ là χ -duy nhất. Ta có một số kết quả sau đây về đồ thị χ -duy nhất mạnh.

Định lý 3 ([10]). Giả sử G là đồ thị liên thông χ -duy nhất. Khi đó G là χ -duy nhất mạnh khi và chỉ khi G là 2-liên thông.

Định lý 4 ([14]). Giả sử G là đồ thị không liên thông. Khi đó G là χ -duy nhất khi và chỉ khi $G = H \cup O_k$, $k \geq 1$, trong đó H là đồ thị χ -duy nhất mạnh.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Để đạt được kết quả nghiên cứu, bài báo đã sử dụng nhiều phương pháp nghiên cứu khác nhau, trong đó phương pháp đồ thị và phương pháp tổ hợp là được sử dụng nhiều hơn cả.

3. Kết quả và đánh giá

3.1. Kết quả

Trước hết ta phát biểu và chứng minh kết quả sau đây về sắc số của đồ thị tách cực.

Định lý 5. Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ

thị tách cực với $|K|=n$ và
 $k = \max\{\deg(u) \mid u \in I\}$.

khi đó

- (i) G là đồ thị n -sắc khi và chỉ khi $k < n$;
- (ii) G là đồ thị $(n + 1)$ -sắc khi và chỉ khi $k = n$.

Chứng minh. (i) Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị n -sắc. Vì $G[I]$ là đồ thị rỗng nên $k \leq n$. Nếu $k = n$, nghĩa là tồn tại đỉnh $u \in I$ sao cho u kề với tất cả các đỉnh của K , thì G chứa đồ thị con đẳng cấu với đồ thị K_{n+1} . Như vậy, $\chi(G) \geq n + 1$, mâu thuẫn với giả thiết G là đồ thị n -sắc.

Ngược lại, giả sử rằng $k < n$. Dễ dàng thấy rằng $\chi(G[K]) = n$. Giả sử

$$f : K \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

là một tô màu đỉnh của $G[K]$. Vì $|N(u)| = \deg(u) < n$ với mọi $u \in I$, số các màu cần thiết để tô màu các đỉnh của $N(u)$ nhỏ hơn n . Điều này nói lên rằng tập $\{1, 2, \dots, n\} \setminus f(N(u)) \neq \emptyset$. Xét ánh xạ

$$g : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

sao cho $g(v) = f(v)$ với mọi $v \in K$ và $g(u) \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus f(N(u))$ với mọi $u \in I$. Khi đó g là n -tô màu của đồ thị G và do đó $\chi(G) = n$.

(ii) Suy ra trực tiếp từ (i).

Tiếp theo là kết quả về đa thức tô màu của đồ thị tách cực.

Định lý 6. Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực với $I = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $\deg(u_i) = t_i$ với $i = 1, 2, \dots, m$ và $|K|=n$. Khi đó

$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)(\lambda - t_1) \dots (\lambda - t_m).$$

Chứng minh. Giả sử $K = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và ta có thể tô màu các đỉnh của đồ thị G bằng λ màu. Dễ thấy đỉnh v_i có $\lambda - i + 1$ cách tô màu với $i = 1, 2, \dots, n$, còn đỉnh u_j có đúng $\lambda - t_j$ cách tô màu với $j = 1, 2, \dots, m$. Do đó số cách tô màu các đỉnh của đồ thị G bằng λ màu là

$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)(\lambda - t_1) \dots (\lambda - t_m).$$

Trong Bảng 1 ta sẽ định nghĩa các đồ thị trợ giúp $G_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ và $H_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$. Các điều kiện của m, n và t_1, t_2, \dots, t_m cho các đồ thị tương ứng được chỉ ra dưới tên của đồ thị trong Cột 1. Các tập con I và K của tập đỉnh V cho mỗi đồ thị này được chỉ ra trong Cột 2. Cuối cùng, trong Cột 3 ta chỉ ra các cạnh của đồ thị tương ứng. Từ định nghĩa, dễ dàng thấy rằng $G_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ và $H_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ là các đồ thị tách cực.

Tiếp theo ta chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề 7. (i) Hai đồ thị $G_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ và $H_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ là tương đương tô màu;

(ii) Hai đồ thị $G_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ và $H_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ không đẳng cấu với nhau.

Chứng minh. (i) Theo Định lý 5 ta có:

$$P(G_n^m(t_1, \dots, t_m)) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)(\lambda - t_1) \dots (\lambda - t_m),$$

và

$$P(H_n^m(t_1, \dots, t_m)) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)(\lambda - t_1) \dots (\lambda - t_m).$$

Do đó hai đồ thị $G_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ và $H_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ là tương đương tô màu.

(ii) Xét

$$A_i = \{u \in V(G_n^m(t_1, \dots, t_m)) \mid \deg(u) = i\}$$

và

$$B_i = \{u \in V(H_n^m(t_1, \dots, t_m)) \mid \deg(u) = i\}.$$

Dễ dàng thấy rằng

$$A_{m+n-1} = \{v_1, v_2, \dots, v_{t_1}\}, B_{m+n-1} = \{v_2, v_3, \dots, v_{t_1}\}.$$

Do đó $|A_{m+n-1}| = |B_{m+n-1}| + 1$. Từ đó suy ra rằng hai

đồ thị $G_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ và $H_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ là không đẳng cấu với nhau.

Bảng 1. Các đồ thị $G_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ và $H_n^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$

Đồ thị $G = (V, E)$	Tập đỉnh $V = I \cup K$	Tập cạnh $E = E_1 \cup \dots \cup E_{m+1}$
$G_n^m(t_1, \dots, t_m)$ ($m \leq 2$, $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m < n$)	$I = \{u_1, \dots, u_m\}$ $K = \{v_1, \dots, v_n\}$	$E_1 = \{u_1v_1, \dots, u_1v_{t_1}\}$ $E_2 = \{u_2v_1, \dots, u_2v_{t_2}\}$ $E_m = \{u_mv_1, \dots, u_mv_{t_m}\}$ $E_{m+1} = \{v_iv_j \mid i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n\}$
$H_n^m(t_1, \dots, t_m)$ ($m \leq 2$, $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m < n$)	$I = \{u_1, \dots, u_m\}$ $K = \{v_1, \dots, v_n\}$	$E_1 = \{u_1v_1, \dots, u_1v_{t_1}\}$ $E_2 = \{u_2v_1, \dots, u_2v_{t_2}\}$ $E_{m-1} = \{u_{m-1}v_1, \dots, u_{m-1}v_{t_{m-1}}\}$ $E_m = \{u_mv_2, \dots, u_mv_{(t_m+1)}\}$ $E_{m+1} = \{v_iv_j \mid i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n\}$

Tiếp theo là kết quả về tính duy nhất tô màu của đồ thị tách cực liên thông.

Định lý 8. Đồ thị tách cực liên thông $G = S(I \cup K, E)$ là χ -duy nhất khi và chỉ khi G đẳng cấu với đồ thị tách cực liên thông $G' = S(I' \cup K', E')$ với $|I'| = 1$.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh điều kiện cần. Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực liên thông χ -duy nhất với $|I| = m, |K| = n$. Nếu $m \geq 3$ hoặc $m = 2$ nhưng $\deg(u) < n$ với mọi $u \in I$, thì theo Bổ đề 7, dễ dàng thấy rằng G không là χ -duy nhất, mâu thuẫn với giả thiết. Nếu $m = 1$ hoặc $m = 2$ nhưng có đỉnh $u \in I$ sao cho

$\deg(u) = n$, thì dễ thấy G đẳng cấu với đồ thị tách cực liên thông $G' = S(I' \cup K', E')$ với $|I'| = 1$.

Bây giờ ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử $G' = S(I' \cup K', E')$ là đồ thị tách cực liên thông với $I' = \{u\}$ và $|K'| = n$. Nếu $\deg(u) = n$ thì G' là đồ thị đầy đủ K_{n+1} . Do đó G' là χ -duy nhất. Vì vậy ta có thể giả sử rằng $1 \leq \deg(u) < n$. Giả sử R là đồ thị sao cho $P(R, \lambda) = P(G', \lambda)$. Theo Định lý 2 và Định lý 5, R là đồ thị n -sắc, có cấp là $n+1$. Theo Khẳng định (i) của Định lý 1, R chứa đồ thị con n -tối hạn H . Dễ dàng thấy rằng $|V(H)| \geq n$. $|V(H)| > n$ thì H không là đồ thị đầy đủ, bởi vì H là đồ thị n -sắc. Theo Khẳng định (ii) của Định lý 1, $|V(H)| \geq n+2$, mâu thuẫn với việc $|V(H)| \leq |V(R)| = n+1$. Do đó ta chắc chắn có $|V(H)| = n$. Nếu H không là đồ thị đầy đủ thì dễ dàng thấy rằng $\chi(H) < n$, mâu thuẫn. Từ đó suy ra H là đồ thị đầy đủ và do đó $R = S(I \cup K, E)$ với $I = \{u^*\}, K = V(H)$. Từ $P(R, \lambda) = P(G', \lambda)$, theo Định lý 6 dễ dàng thấy rằng $\deg_R(u^*) = \deg_G(u)$. Từ đó suy ra R và G' đẳng cấu với nhau. Vậy, G' là χ -duy nhất.

Cuối cùng là kết quả về tính duy nhất tô màu của đồ thị tách cực không liên thông.

Định lý 9. Đồ thị tách cực không liên thông $G = S(I \cup K, E)$ là χ -duy nhất khi và chỉ khi G đẳng cấu với đồ thị $H \cup O_k$, trong đó $k \geq 1$ và $H = S(I' \cup K', E')$ là đồ thị tách cực liên thông thỏa mãn $|I'| = 1$ nhưng $|N(I')| > 1$ nếu $|K'| > 1$.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh điều kiện cần. Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực không liên thông χ -duy nhất. Theo Định lý 4, G đẳng cấu với $G' \cup O_k$, trong đó $k \geq 1$ và G'

là đồ thị tách cực χ -duy nhất mạnh. Theo Định lý 2, G' đẳng cấu với đồ thị tách cực $H = S(I' \cup K', E')$ với $|I'| = 1$. Theo Định lý 3, H là 2-liên thông. Do đó $|N(I')| > 1$ nếu $|K'| > 1$.

Bây giờ ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử G đẳng cấu với đồ thị $H \cup O_k$, trong đó $k \geq 1$ và $H = S(I' \cup K', E')$ là đồ thị tách cực liên thông thỏa mãn $|I'| = 1$ nhưng $|N(I')| > 1$ nếu $|K'| > 1$. Nếu $|K'| = 1$ thì H là 2-liên thông, bởi vì $|N(I')| > 1$. Theo Định lý 3, H là χ -duy nhất mạnh. Do đó theo Định lý 4, G là χ -duy nhất.

3.2. Đánh giá

Chúng ta biết rằng, bài toán tô màu đỉnh đồ thị là bài toán khó và là một trong những vấn đề trung tâm của lý thuyết đồ thị. Cho đến nay bài toán này vẫn chưa có lời giải tổng quát cho mọi đồ thị,

mà chỉ có lời giải cho một lớp đồ thị nào đó. Theo cách tiếp cận đó, bài báo này đã giải quyết bài toán tô màu đỉnh một cách trọn vẹn cho lớp đồ thị tách cực: Xác định được sắc số, đa thức tô màu và đặc trưng được lớp đồ thị tách cực duy nhất tô màu.

4. Kết luận

Trong lý thuyết đồ thị, đã có nhiều kết quả nghiên cứu về bài toán tô màu. Đối với đồ thị tách cực, vấn đề này cũng đã được một số nhà toán học quan tâm nghiên cứu và đã đạt được một số kết quả về tô màu cạnh và tô màu tổng thể (xác định sắc số cạnh, sắc số tổng thể và phân lớp đồ thị theo sắc số cạnh) [4]. Với việc tiếp cận vấn đề tô màu đỉnh, bài báo đã giải quyết xong bài toán tô màu đỉnh đối với lớp đồ thị tách cực, đây là những kết quả lần đầu tiên được phát biểu và chứng minh, góp phần làm phong phú thêm các kết quả nghiên cứu về bài toán tô màu nói chung và bài toán tô màu đỉnh nói riêng. Từ những kết quả này, trong tương lai hy vọng sẽ có những kết quả sâu sắc hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. Behazad and G. Chartrand (1971), *Introduction to the Theory of graphs*, Allyn and Bacon, Boston.
- [2] G. D. Birkhoff (1912), *A determinant formula for the number of ways of coloring a map*, Annals of Math, 14 (2), 42 -46.
- [3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty (1976), *Graph theory with applications*, MacMillan.
- [4] B.-L. Chen, H.-L. Fu, M.T. Ko (1995), *Total chromatic number and chromatic index of split graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput. 17, 137 – 146.
- [5] V. Chvatal and P.L. Hammer (1977), *Aggregation of inequalities in integer programming*, Ann. Discrete Math. 1, pp. 145 – 162.
- [6] S. Foldes and P.L. Hammer (1977), *Split graphs*, In: Proceeding of the Eighth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Louisiana State University, Baton Rouge, LA, 1977), *Congressus Numerantium*, vol. XIX, Utilitas Mathematics, Winnipeg, Man., pp. 311 – 315.
- [7] S. Foldes and P.L. Hammer (1978), *On a class of matroid-producing graphs*, In: Combinatorics (Proceeding of the Fifth Hungarian Colloquium, Keszthely, 1976), vol. 1, Colloquium Mathematical Society, Jano's Bolyai, vol. 18, North-Holland, Amsterdam, New York, pp. 331 - 352.
- [8] P. B. Henderson and Y. Zalcstein (1977), *A graph-theoretic characterization of the PV_{chunk} class of synchronizing primitive*, SIAM J. Comput. 6, 88-108.
- [9] A. Hesham H. And El-R. Hesham (1993), *Task allocation in distributed systems: a split graph model*, J. Combin. Math. Combin. Comput. 14, 15-32.
- [10] K. M. Koh and K. L. Teo (1990), *The search for chromatically unique graphs*, Graphs Combin. 6, 259-285.
- [11] K. M. Koh and K. L. Teo (1997), *The search for chromatically unique graphs II*, Discrete Math. 172, 59-78.
- [12] U. N. Peled (1975), *Regular Boolean functions and their polytope*, Chapter VI, PH. D. Thesis, Univ.

Of Waterloo, Dept. Combin. And Optimization.

[13] R. C. Read (1968), *An introduction to chromatic polynomials*, J. Combin. Theory 4, 52-71.

[14] R. C. Read (1987), *Connectivity and chromatic uniqueness*, Ars Combin. 23, 209-218.