NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT TRONG PHẦN MỀM MATHEMATICA

THE SOLUTION OF THE HEAT TRANSFER PROBLEM IN MATHEMATICA SOFTWARE

Lê Hải Trung
Trường Đại Học Sư Phạm – Đại Học Đà Nẵng
Email: trungybvnvr@yahoo.com

TÓM TẮT

Nội dung bài báo thực hiện việc xây dựng các câu lệnh trong phần mềm Mathematica để tính toán đối với thế vị nhiệt bề mặt và thế vị nhiệt thể tích trong công thức Poison (xem [1], [2], [4], [5]) để từ đó thu được nghiệm của bài toán ban đầu, sau đó bằng lệnh Plot3D ta sẽ nhận được đồ thị tương ứng của các nghiệm thu được.

Từ khóa: phương trình truyền nhiệt; thế vị nhiệt bề mặt; thế vị nhiệt thể tích; công thức Poison; hàm thực hiện.

ABSTRACT

This article builds commands in Mathematica software to calculate surface potential and volume potential of Poison formula ([1], [2], [4], [5]), obtained from the solution of the heat equation with boundary conditions, and then the Plot3D command will receive the corresponding graph of the solutions gained.

Key words: the heat equation; Poison formula; surface potential; volume potential; test function.

1. Đặt vấn đề

Ta đã biết (xem [1], [2], [4], [5]) nghiệm của bài toán đầu (hay còn gọi là bài toán Cauchy) cho phương trình truyền nhiệt :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \qquad (1)$$

và điều kiện đầu:

$$u|_{t=0} = u(x), \qquad (2)$$

dưới dạng tổng của thế vị nhiệt bề mặt và thế vị thể tích:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy + \int_0^t \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y,\tau) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} dy \right) d\tau. \qquad (3)$$

Nếu ta đưa vào kí hiệu:

$$G(a, x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x)^2}{4a^2 t}},$$

khi đó nghiệm của bài toán truyền nhiệt viết được dưới dạng sau:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(a, x-y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(a, x-y, t-s) f(y,s) dy ds.$$

2. Áp dụng

Bước 1. Thực hiện các cú pháp sau đây cho việc thực hiện tính toán đối với thế vị nhiệt bề mặt và thế vị nhiệt thể tích:

$G = (1/(2*\#1\sqrt{\pi*\#3}))*$
$\text{Exp}[\#2^2/(-4\#1^2\#3)]\&;$

$G = [a,x,t]$

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{t}}$$

vo[a_,u_]: = Simplify[Integrate[G[a,x − y,t]*u[y], {y, − ∞,∞}],t > 0&&x ∈ Reals]
vi[a_,u_]: = Simplify[Integrate[G[a,y,t]*u[x-y], {y, − ∞,∞}], t > 0&&x ∈ Reals]

$\text{woo[a\_,f\_]:} = \text{Simplify[Integrate[G[a,x}-\text{y,t-s]*}$
$\text{f[y,s],\{y,}-\infty,\infty\}],\ 0<s<t\&\&x\in \text{Reals]}$

$\text{wii[a\_,f\_]:} = \text{Simplify[Integrate[G[a,y,s]*f[x-y,t-s],}$
$\{y,-\infty,\infty\}],\ 0<s<t\&\&x\in \text{Reals]}$

$\text{woi[a\_,f\_]:} = \text{Simplify[Integrate[G[a,x}-\text{y,s]*f[y,t-s],}$
$\{y,-\infty,\infty\}],\ 0<s<t\&\&x\in \text{Reals]}$

$\text{wio[a\_,f\_]:} = \text{Simplify[Integrate[G[a,y,t-s]*f[x-y,s],}$
$\{y,-\infty,\infty\}],\ 0<s<t\&\&x\in \text{Reals]}$

$\text{ints[w\_]:} = \text{Simplify[Integrate[w,\{s,0,t\}],}$
$t>0\&\&x\in \text{Reals]}$

$$\text{uoo[a\_,f\_]:=ints[woo[a,f]];}$$

$$\text{uii[a\_,f\_]:=ints[wii[a,f]];}$$

$$\text{uoi[a\_,f\_]:=ints[woi[a,f]];}$$

$$\text{uio[a\_,f\_]:=ints[wio[a,f]];}$$

Bước 2. Thực hiện kiểm tra tính đúng đắn của công thức đối với thế vị nhiệt bề mặt và thế vị nhiệt thể tích:

vo[a,u]

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} u[y]dy}{2\text{a}\sqrt{\pi t}}$$

vi[a,u]

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4a^2t}} u[x-y]dy}{2\text{a}\sqrt{\pi t}}$$

uoo[a,f]

$$\frac{\int_0^t \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x-y)^2}{4a^2(s-t)}} f[y,s]}{\sqrt{-s+t}} ds}{2\text{a}\sqrt{\pi}}$$

uoi[a,f]

$$\frac{\int_0^t \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 s}} f[y,-s+t]}{\sqrt{s}} ds}{2\text{a}\sqrt{\pi}}$$

Bước 3. Thực hiện cú pháp sau cho việc kiểm tra kết quả:

$\text{l1:} = \text{Simplify[(D[\#4,t]-\#1\^{}2*(D[\#4,x1,x1]} +$
$\text{D[\#4,x2,x2]} + \text{D[\#4,x3,x3])-\#2),}$
$t>0\&\&x1\in \text{Reals;}x2\in \text{Reals;}x3\in \text{Reals]\&}$
$\text{l0:} = \text{Simplify[(Limit[\#4,t} \to 0,\text{Direction} \to \text{-1]-\#3),}$
$x1\in \text{Reals;}x2\in \text{Reals;}x3\in \text{Reals]\&}$
$\text{l:} = \{\text{l1[\#1,\#2,\#3,\#4],l0[\#1,\#2,\#3,\#4]}\}\&$

Ví dụ 1. *Tìm nghiệm của bài toán sau đây:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-2t}\cos\frac{x}{2},\ u|_{t=0} = x.$$

Hiển nhiên phương trình đã cho có dạng (1) – (2) với $a = 1,\ f(x,t) = e^{-t^2}\cos\frac{x}{2},$ và $u_0(x) = x.$

Ta nhập vào Mathematica:

In1:=

$\text{f[x\_,t\_]} = \text{Exp[-2t]*Cos[x/2];u[x\_]} = \text{x;a} = 1;$

In2:= $\text{v0[x\_,t\_]} = \text{vi[a,u]}$

Out2:= x

In3:= wio[a,f]

Out3:= $\text{e}^{-\frac{7\text{s}}{4}-\frac{\text{t}}{4}}\text{Cos}[\frac{\text{x}}{2}]$

In4= $\text{v1[x\_,t\_]} = \text{uio[a,f]}$

Out4= $\frac{4}{7}\text{e}^{-2\text{t}}(-1+\text{e}^{\frac{7\text{t}}{4}})\text{Cos}[\frac{\text{x}}{2}]$

In5:= $\text{u[x\_, t\_]} = \text{v0[x, t]} + \text{v1[x, t]}$

Out5:= $x+\frac{4}{7}e^{-2t}(-1+e^{\frac{7t}{4}})\mathrm{Cos}[\frac{x}{2}]$

Kiểm tra:

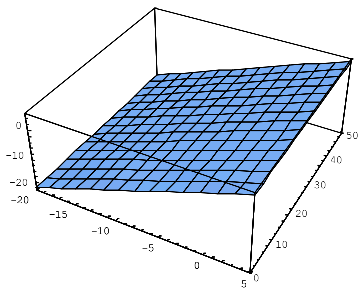
l[a,f[x1, t], u0[x1], u1[x1, t]]

{0,0}

Như vậy nghiệm của bài toán đã cho là:

$$u(x,t)=x+\frac{4}{7}e^{-2t}(-1+e^{\frac{7t}{4}})\mathrm{Cos}[\frac{x}{2}].$$

Đồ thị của $u(x,t)$ được mô tả bởi Hình 1:



***Hình 1.** Đồ thị của hàm*

$$u(x,t)=x+\frac{4}{7}e^{-2t}(-1+e^{\frac{7t}{4}})\mathrm{Cos}[\frac{x}{2}].$$

Ví dụ 2. *Tìm nghiệm của bài toán sau đây:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}-16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=t^2\sin 2x,$$

$$u|_{t=0}=e^{-x^2}x.$$

In1:= f[x_,t_] = Sin[2x]*t^2;u0[x_]
= Exp[– x^2][x;a = 4;

In2:= v0 := vi[a,u0]

Out2:= $v0=\frac{xe^{\frac{-x^2}{1+64t}}}{(1+64t)^{3/2}}$

In3:= wio[a,f]

Out3:= $e^{64(s-t)}s^2\mathrm{Sin}[2x]$

In4:= uio[a,f]

Out4:=

$$\frac{e^{-64t}(-1+e^{64t}(1-64t+2048t^2))\mathrm{Sin}[2x]}{131072}$$

In5:= v1[x_,t_] = uio[a,f]

Out5:=

$$\frac{e^{-64t}(-1+e^{64t}(1-64t+2048t^2))\mathrm{Sin}[2x]}{131072}$$

In6:= u[x_, t_] = v0[x, t] + v[x, t]

Out6:= $\frac{xe^{\frac{-x^2}{1+64t}}}{(1+64t)^{3/2}}+$

$$\frac{e^{-64t}(-1+e^{64t}(1-64t+2048t^2))\mathrm{Sin}[2x]}{131072}$$

Kiểm tra:

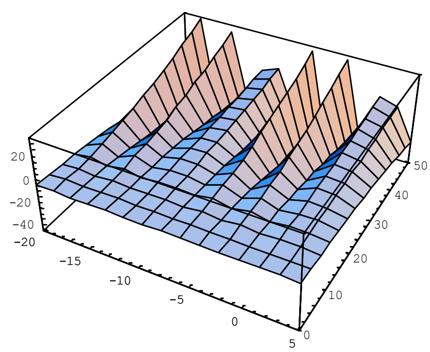
l[a,f[x1, t], u0[x1], u[x1, t]]

{0,0}

Như vậy nghiệm của bài toán đã cho là:

$$u(x,t)=\frac{xe^{\frac{-x^2}{1+64t}}}{(1+64t)^{3/2}}+\frac{e^{-64t}(-1+e^{64t}(1-64t+2048t^2))\mathrm{Sin}[2x]}{131072}$$

Đồ thị của $u(x,t)$ được mô tả bởi Hình 2:



***Hình 2.** Đồ thị của hàm* $u(x,t)=\frac{xe^{\frac{-x^2}{1+64t}}}{(1+64t)^{3/2}}+\frac{e^{-64t}(-1+e^{64t}(1-64t+2048t^2))\mathrm{Sin}[2x]}{131072}$

3. Kết luận

Bài báo đã đề xuất phương pháp giải bài toán truyền nhiệt bằng phần mềm Mathematica thông qua việc tính toán đối với các thế vị. Sau mỗi ví dụ thì đồ thị của các hàm đều được mô tả một cách rõ nét, đem lại cách nhìn nhận trực quan cho các đối tượng quan tâm đến dáng điệu nghiệm của bài toán truyền nhiệt.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Владимиров В. С (2003), *Уравнения математической физики*, Москва.

[2] Смирнов М.М (1964), *Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка*, Москва.

[3] Kevorkian (2000), J. *Partial Differential Equations*, Analytical Solution Techniques.,New York: Springer-Verlag.

[4] Lawrence C. Evans, *Partial Diferential Equations*, American Mathematical Society.

[5] Nguyễn Mạnh Hùng (2009), *Phương trình đạo hàm riêng*, Hà Nội.

[6] Nguyễn Thừa Hợp (2001), *Giáo trình phương pháp đạo hàm riêng,* Hà Nội.