VỀ MÔĐUN ĐỐI CỐT YẾU ĐƠN VÀ MÔĐUN NÂNG ĐƠN

ON MONO SMALL AND MONO LIFTING MODULES

Nguyễn Thị Thu Sương

Trường ĐH Sư phạm – Đại học Đà Nẵng

Email: nttsuong.hlp@gmail.com

Nguyễn Thị Nhành

Trường ĐH Đồng Tháp

TÓM TẮT

Một môđun con *N* của *M* được gọi là *đối cốt yếu trong M,* ký hiệu $N = \ M$, trong trường hợp với mọi môđun con $L \le M : N + L = M$ suy ra $L = M$. Một môđun *M* được gọi là *nâng* nếu mọi môđun con *N* của *M*, tồn tại sự phân tích $M = M_1 \oplus M_2 : M_1 \le N, M_2 \cap N = \ M$. Lớp các môđun này đã được nghiên cứu trong các năm gần đây. Hơn nữa người ta đã chứng minh được một vành là *hoàn chỉnh phải* nếu mọi môđun phải *M*, thì tồn tại toàn cấu $\varphi : P \to M$ với *P* xạ ảnh và $\mathrm{Ker}(\varphi) = \ P.$ Đồng thời một vành *R* được gọi là *nửa hoàn chỉnh* nếu mọi môđun phải (trái) đơn *M*, thì tồn tại toàn cấu $\varphi : P \to M$ với *P* xạ ảnh và $\mathrm{Ker}(\varphi) = \ P.$ Từ các tính chất quan trọng đó, trong bài báo này chúng tôi đưa ra khái niệm *môđun đối cốt yếu đơn*, *môđun nâng đơn* và áp dụng của chúng trong một số lớp vành và môđun đã biết.

Từ khóa: đối cốt yếu; nâng; đối cốt yếu đơn; nâng đơn.

ABSTRACT

A submodule *N* is called *superfluous* in *M*, write $N = \ M$, if for any submodule $L \le M : N + L = M$ implies that $L = M$. A module *M* is called *lifting* if for any submodule *N* of *M*, there is a decomposition $M = M_1 \oplus M_2 : M_1 \le N, M_2 \cap N = \ M$. Recently, this classes are studied by the authors. A ring *R* is called right *perfect* if for every right *R*-module *M*, there exists an epimorphism $\varphi : P \to M$ with *P* is projective and $\mathrm{Ker}(\varphi) = \ P.$ A ring *R* is called right *smiperfect* if for every simple right *R*-module *M*, there exists an epimorphism $\varphi : P \to M$ with *P is* projective and $\mathrm{Ker}(\varphi) = \ P.$ In this paper, we study some generalizations of superfluous submodules and lifting modules and their applications for classes rings and modules.

Key words: small; lifting; mono-small; mono-lifting.

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, vành *R* đã cho luôn được giả thiết là vành kết hợp có đơn vị $1 \ne 0$ và mọi *R*-môđun được xét là môđun unita. Trong mục này, chúng tôi giới thiệu những khái niệm cơ bản được sử dụng trong bài báo. Một số khái niệm khác liên quan đến bài báo chúng ta có thể tham khảo trong Wisbauer ([5]). Với vành *R* đã cho, ta viết M_R (tương ứng, ${}_RM$) để chỉ M là một R-môđun phải (t.ư, trái). Trong một ngữ cảnh cụ thể của bài báo, khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, để đơn giản ta viết môđun M thay vì M_R. Chúng ta dùng các ký hiệu $A \le M$ $(A < M), A \le_d M$ để chỉ A là môđun con (t.ư., thực sự), hạng tử trực tiếp của M.

Một vài năm gần đây, hướng nghiên cứu mở rộng của môđun nâng được nhiều người quan tâm và nghiên cứu. Năm 2006, các tác giả Clark, Lomp, Vanaja và Wisbauer đã đưa ra và nghiên cứu lớp môđun nâng. Năm 2005, Kosan đã nghiên cứu về điều kiện của môđun nâng và môđun con bất biến hoàn toàn. Cũng theo đó, chúng tôi đã nghiên cứu môđun đối cốt yếu đơn và áp dụng của nó trong lý thuyết vành và môđun; cụ thể là áp dụng chúng vào lớp môđun mở rộng của lớp môđun nâng, đó là môđun nâng đơn.

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh

được rằng một môđun con N của M được gọi là *đối cốt yếu đơn* trong M nếu và chỉ nếu $N \subseteq Rad(M)$ (Mệnh đề 2.2). Hơn nữa chúng tôi còn chứng minh được các lớp môđun nâng đơn là đóng dưới tổng trực tiếp và một môđun M gọi là *nâng đơn* nếu và chỉ nếu với mọi $A \le M$, tồn tại $A = N \oplus S$ sao cho $N \le_d M$ và $S =_m M$ (Mệnh đề 3.2). Từ đó chúng tôi còn chứng minh được: Cho M là môđun nâng đơn và $X \le M$. Nếu mọi hạng tử trực tiếp K của M, $(X+K)/X$ là hạng tử trực tiếp của M/X, thì M/X là môđun nâng đơn (Định lý 3.7). Ngoài ra một số tính chất khác của môđun đối cốt yếu đơn và môđun nâng đơn và các ví dụ của chúng cũng được xét đến.

2. Môđun đối cốt yếu đơn

Định nghĩa 2.1. Một môđun con N của M được gọi là *đối cốt yếu đơn* trong M, ký hiệu $N =_m M$ nếu với mọi $n \in N, M \neq nR + K$, với mọi K là môđun con thực sự của M, tức là với mọi $n \in N, nR = M$.

Mệnh đề 2.2. Cho N là môđun con của môđun M. Khi đó $N =_m M$ khi và chỉ khi $N \subseteq Rad(M)$.

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Với mọi $n \in N$. Ta có : $N =_m M$ nên $nR = M$. Khi đó : $n \in nR \subseteq Rad(M)$. Điều này chứng tỏ $N \subseteq Rad(M)$.

($\Leftarrow$) Với mọi $n \in N$. Do $N \subseteq Rad(M)$ nên $n \in Rad(M)$, suy ra $n \in I_1 + I_2 + ... + I_k$ với $I_i = M, i = \overline{1,k}$. Khi đó tồn tại $i_1, i_2, ..., i_k \in I_1, I_2, ..., I_k : n = i_1 + i_2 + ... + i_k$. Vì thế $nR \le I_1 + I_2 + ... + I_k$. Gọi K là môđun con thực sự của M. Ta phải chỉ ra rằng $nR + K \neq M$. Giả sử ngược lại $nR + K = M$. Khi đó:

$$(I_1 + I_2 + ... + I_k) + K = M. \qquad (2.2.1)$$

Lại có: $I_1 = M, I_2 = M, ..., I_k = M$. Nên $(I_1 + I_2 + ... + I_k) = M$. (2.2.2)

Từ (2.2.1) và (2.2.2) ta có $K = M$. Điều này mâu thuẫn vì $K \neq M$. Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng $nR + K \neq M$. Suy ra $nR = M$, với $n \in N$. Như vậy $N =_m M$.

Ví dụ 2.3. **(1)** Với mọi môđun M thì $Rad(M) =_m M$.

(2) Nếu $Rad(M) = M$ thì mọi môđun con của M là đối cốt yếu đơn trong M.

(3) Nếu M là môđun địa phương thì mọi môđun con thực sự của M là đối cốt yếu đơn trong M.

(4) Mọi môđun con của môđun hổng, không địa phương M là đối cốt yếu đơn trong M.

(5) M là **Z**-môđun tự do. Từ $Rad(\mathbf{Z}) = 0$ ta có $Rad(\mathrm{M}) = 0$. Khi đó 0 là môđun con đối cốt yếu đơn duy nhất của M.

Từ bổ đề trên, chúng ta bắt đầu với một vài tính chất về môđun đối cốt yếu đơn, và các tính chất này thường được sử dụng cho các kết quả về sau.

Bổ đề 2.4. Cho A, B và C là các môđun con của R-môđun M.

(1) Nếu $A =_m B$ và $B \le C$ thì $A =_m C$.

(2) Nếu $A =_m M, A \le B$ và $B \le_d M$ thì $A =_m B$.

(3) Nếu $A =_m M$ và $f : M \to N$ là một đồng cấu thì $f(A) =_m f(\mathrm{M})$.

(4) Cho $A \le B$. Khi đó $B =_m M$ nếu và chỉ nếu $A =_m M$ và $B/A =_m M/A$.

(5) Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là các môđun con đối cốt yếu đơn của M. Khi đó:

$$A_1 + A_2 + ... + A_n =_m M.$$

(6) $A + B =_m M$ nếu và chỉ nếu

$A = {}_m M$ và $B = {}_m M$.

(7) Cho N là một môđun con của môđun M, $Rad(M) = M$. Khi đó $N = {}_m M$ nếu và chỉ nếu $N = M$.

Chứng minh. (1) Từ $A = {}_m B$ và do $B \subseteq C$, ta có $A \subseteq Rad(B) \subseteq Rad(C)$. Vì vậy $A = {}_m C$

(2) Từ $A = {}_m M$ và $A \subseteq B \leq_d M$, ta có $A \subseteq Rad(M) \cap B$.

Nhưng $(Rad(M) \cap B) = Rad(B)$ khi đó $A \subseteq Rad(\mathrm{B})$. Vậy $A = {}_m B$

(3) Từ $A = {}_m M$ nên $A \subseteq Rad(M)$, do f là một đồng cấu nên $f(A) \subseteq f(Rad(M))$.Nhưng $f(Rad(M)) \subseteq Rad(f(M))$.

Khi đó $f(A) \subseteq Rad(f(M))$.

Điều này kéo theo $\mathrm{f(A)} = {}_m f(M)$.

(4) $(\Rightarrow)$ Từ $A \subseteq B$ và $B = {}_m M$ ta có $A \subseteq B \subseteq Rad(M)$, nên $A \subseteq Rad(M)$, suy ra $A \subseteq Rad(M)$. Mặt khác $B = {}_m M$ thì $f(B) = {}_m f(M)$ hay $B/A = {}_m M/A$.

$(\Leftarrow)$ Từ $A = {}_m M$ và $B/A = {}_m M/A$ ta có được $A \subseteq Rad(M)$ và $B/A \subseteq Rad(M/A)$. Mà ta lại có $Rad(M/A) \subseteq \mathrm{Rad(M)/A}$. Từ đây ta suy ta $B \subseteq Rad(\mathrm{M})$. Vì vậy ta đã chứng minh được $B = {}_m M$.

(7) $(\Rightarrow)$ Vì $N = {}_m M$ và $Rad(\mathrm{M}) = M$ nên $N \subseteq Rad(\mathrm{M}) = M$. Do đó $N = M$.

$(\Leftarrow)$ Rõ ràng.

3. Môđun nâng đơn

Trong phần này chúng tôi đưa ra và nghiên cứu lớp môđun mở rộng của lớp môđun nâng là lớp môđun nâng đơn.

Định nghĩa 3.1. Môđun M được gọi là *nâng đơn* nếu, với mọi $N \leq M$ tồn tại sự phân tích $M = A \oplus B$ sao cho $A \leq N$ và $N \cap B$ là đối cốt yếu đơn trong M có nghĩa là với mọi $N \leq M$, tồn tại sự phân tích $M = A \oplus B$ sao cho $A \leq N$ và $N \cap B \subseteq Rad(M)$.

Mệnh đề dưới đây cho ta biết một điều kiện tương đương của một môđun nâng đơn.

Mệnh đề 3.2. **(1)** Các điều kiện sau đây là tương đương đối với môđun M_R :

(i) M là nâng đơn.

(ii) Với mọi $A \leq M$, tồn tại $A = N \oplus S$ sao cho $N \leq_d M$ và $S = {}_m M$.

(iii) Với mọi $A \leq M$, tồn tại $N \leq_d M$ sao cho $N \leq A$ và $A/N = {}_m M/\mathrm{N}$.

(iv) Với mọi $A \leq M$, tồn tại $\mathrm{e} = \mathrm{e}^2 \in End(M)$ sao cho $\mathrm{e(M)} \leq \mathrm{A}$ và $(1-e)A \leq Rad(1-e)M$.

(2) Các lớp môđun nâng đơn là đóng dưới tổng trực tiếp.

Chứng minh. (1) (i) $\Rightarrow$ (ii) Với mọi $A \leq M$, từ (i) ta có M là nâng đơn nên tồn tại $M = N \oplus N'$ sao cho $N \leq A$ và $N' \cap A = {}_m M$. Khi đó $N \oplus (N' \cap A) = A$ (Luật Modular), nên $N' \cap A = S$. Do đó $S = {}_m M$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Với mọi $A \leq M$, do (ii) nên tồn tại $A = N \oplus S$ sao cho $N \leq_d M$ và $S = {}_m M$. Với mọi $a + N \in A/N, a \in A$; ta có $(a+N)R = M/N$. Vậy nên $A/N = {}_m M/\mathrm{N}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Với mọi $\mathrm{A} \leq \mathrm{M}$, do (iii) ta có $N \leq_d M$ nên tồn tại $e = e^2 \in End(M) : e(M) = N$ và $(1-e)M = N'$. Do $N \leq A$ nên $e(M) \leq A$. Tiếp theo chúng ta sẽ chứng minh $(1-e)A \leq Rad((1-e)M)$. Thật vậy

với mọi $a \in A$,
$H \le (1-e)M : (1-e)aR + H = (1-e)M$. Do đó $(a+e(M))R + H = (1-e)M$, ta suy ra được

$(a+e(M))R + (H+e(M))/e(M)$
$= (1-e)M + e(M)$

Vì vậy
$(a+e(M))R + (H+e(M))/e(M) = M/e(M)$ Từ (iii) ta có $A/e(M) =_m M/e(M)$. Vậy nên $H + e(M) = M$. Suy ra:
$(H+e(M)) \cap (1-e(M)) = M \cap (1-e)M$. Hơn nữa dùng luật Modular ta chứng minh được $H = (1-e)M$. Do đó với mọi $a \in A, (1-e)aR = (1-e)M$. Vậy

$(1-e)A \le Rad(1-e)M$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Với mọi $A \le M$, từ (iv) ta có $e = e^2 \in End(M)$, $e(M) \le A$ nên ta có $M = M_1 \oplus M_2$. Khi đó $M_1 = e(M) \le A$ và $M_1 \le A$. Vì $(1-e)A \le M$ nên $(1-e)A \le Rad((1-e)M) \le Rad(M)$. Bây giờ ta cần chứng minh $(1-e)M \cap A = (1-e)A$ và $(1-e)M = M_2$. Thật vậy, với mọi $(1-e)a \in (1-e)A$, do $e(M) \le A$ nên ta có $(1-e)a = a - ea \in A$. Lại có $(1-e)a \in (1-e)M \cap A \Rightarrow$ $(1-e)A \subset ((1-e)M \cap A)$. Tiếp đến $\forall y \in (1-e)M \cap A$ tồn tại $m \in M, a \in A : (1-e)m = a \Rightarrow m = em + a \in A$. Do đó $y \in (1-e)A$. Suy ra $((1-e)M \cap A) \subset (1-e)A$. Vì thế $M_2 \cap A =_m M$. Vậy M là nâng đơn.

(2) Giả sử M là nâng đơn, K là hạng tử trực tiếp của M. Với mọi $L \le K \le M$, vì M là nâng đơn nên tồn tại sự phân tích $M = M_1 \oplus M_2$ sao cho $M_1 \le L$ và $M_2 \cap L =_m M$. Ta có $M_1 \oplus (M_2 \cap K) = K$ và $L \cap (M_2 \cap K) = L \cap M_2 =_m M$. Theo Bổ đề (2.4)(2) suy ra $(M_2 \cap K) \cap L =_m K$. Vậy ta đã chứng minh được K là nâng đơn.

Ví dụ 3.3. Rõ ràng môđun nâng là một môđun nâng đơn.

Định nghĩa 3.4. M được gọi là *môđun hổng* nếu mọi môđun con thực sự của M là đối cốt yếu trong M.

Định nghĩa 3.5. $M \neq 0$ được gọi là *môđun địa phương* nếu tồn tại một môđun con lớn nhất khác M.

Mệnh đề tiếp theo ta cũng chứng minh các điều kiện tương đương của môđun nâng đơn, nhưng là môđun không phân tích được

Mệnh đề 3.6. Cho M là môđun khác không, không phân tích được. Các điều kiện sau là tương đương:

(1) M là môđun nâng đơn.

(2) Mọi môđun con thực sự là đối cốt yếu đơn trong M.

(3) *Rad(M)* là tổng của tất cả các môđun con thực sự của M.

(4) $Rad(M) = M$ hoặc M là môđun địa phương.

(5) M là nửa hổng.

Chứng minh :

$(i) \Rightarrow (ii)$ Với mọi $N \le M, N \neq M$, do M là nâng đơn nên tồn tại sự phân tích $M = C \oplus D$ sao cho $C \le N, D \cap N =_m M$. Do M không phân tích được nên $C = 0$ hoặc $C = M$. Chúng ta chú ý $M \neq N$, nên ta có $C = 0, D = M$. Vậy $N =_m M$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Đặt $E = \sum I$, với I là các môđun con thực sự của môđun M. Ta có $E \le M, E \neq M$, theo (ii) ta có

$E =_m M \Rightarrow E \subseteq Rad(M)$. Mặt khác $Rad(M) \subseteq E$, vì vậy ta đã chứng minh được $Rad(M) = E$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Giả sử $Rad(M) \neq M$. Khi đó *M* là môđun địa phương.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Hiển nhiên.

(v) $\Rightarrow$ (iv) Nếu $Rad(M) = M$ thì chứng ta có điều cần chứng minh. Bây giờ nếu $\mathrm{Rad(M)} \neq \mathrm{M}$ thì $Rad(M)$ là môđun con thực sự của *M*. Vì *Rad(M)* là môđun con lớn nhất. Nên *M* là một môđun địa phương.

Các định lý sau đây đưa ra một vài điều kiện để đảm bảo một môđun thương của một môđun nâng đơn sẽ là một môđun nâng đơn.

Định lý 3.7. (1) Giả sử rằng M là môđun nâng đơn và $X \leq M$. Nếu mọi K là hạng tử trực tiếp của *M,* $(X+K)/X$ là hạng tử trực tiếp của M/X. Khi đó M/X là môđun nâng đơn.

(2) Nếu M là môđun phân phối, thì M/X là môđun nâng đơn với $\mathrm{X} \leq \mathrm{M}$.

(3) Cho $X \leq M$ và $eX \subseteq X$ với mọi $e^2 = e \in End(M)$. Khi đó M/X là nâng đơn.

Chứng minh. (1) Với mọi $A/X \leq M/X$, suy ra $X \leq A \leq M$. Do M là môđun nâng đơn nên tồn tại $M = K \oplus K'$ sao cho $K \leq A$ và $A/K =_m M/K$. Vì $\mathrm{(X+K)/X}$ là hạng tử trực tiếp của $\mathrm{M/X}$, nên $(X+K)/K \leq A/X$ và $A/(K+X) =_m M/(K+X)$. Vậy $\mathrm{M/X}$ là môđun nâng đơn.

(2) Với mọi *D* là hạng tử trực tiếp của *M,* có nghĩa là $M = D \oplus D'$. Ta có $M/X = (X+D)/X + (X+D')/X$. Ta cần chứng minh $(X+D)/X \cap (X+D')/X = X$. Thật vậy với mọi $y \in (X+D)/X \cap (X+D')/X$, khi đó tồn tại $d \in D, d' \in D'$ sao cho $d + X = d' + X$, suy ra $d - d' \in X$. Do *M* là môđun phân phối nên $X = (D \cap X) \oplus (D' \cap X)$ nên $d - d' \in (D \cap X) \oplus (D' \cap X)$, suy ra $y \in X$. Khi đó $M/X = (X+D)/X \oplus (X+D')/X$. Theo (1) thì M/X là môđun nâng đơn.

(3) Hoàn toàn tương tự như chứng minh ở (2). Vì $eX \subseteq X$ với mọi $e^2 = e \in End(M)$ nên $(X+D)/X \cap (X+D')/X = X$. Khi đó ta có điều phải chứng minh.

Bổ đề 3.8. Cho *M* là một môđun. Nếu *M* là nửa hổng thì khi đó mọi môđun thương của *M* là nửa hổng.

Chứng minh. Bổ đề này được chứng minh dễ dàng.

Cho *M* là một môđun, $M = \oplus_{i\in I} M_i, M_i$ là các môđun con của *M*. Nếu *N* là một môđun con bất biến hoàn toàn của *M* thì $N = \oplus_{i\in I}(N \cap M_i)$.

Bổ đề 3.9. Cho *M* là một môđun đối ngẫu và $M = M_1 \oplus M_2$. Khi đó *M* là môđun nâng đơn nếu và chỉ nếu M_1 và M_2 là các môđun nâng đơn.

Chứng minh : $(\Rightarrow)$ Hiển nhiên.

$(\Leftarrow)$ Giả sử M_1 và M_2 là các môđun nâng đơn. Với mọi $K \leq M$, ta có $M = M_1 \oplus M_2$. Do M là đối ngẫu nên ta có $K = (M_1 \cap K) \oplus (M_2 \cap K)$. Từ $M_1 \cap K$ và $M_2 \cap K$ là môđun con của M_1 và M_2. Lúc đó tồn tại $A_1, B_1 \leq M_1$ sao cho $A_1 \leq (M_1 \cap K)$ và $M_1 = A_1 \oplus B_1$ để mà $B_1 \cap (K \cap M_1) = B_1 \cap K =_m B_1$ và $A_2, B_2 \leq M_2$ sao cho $A_2 \leq (M_2 \cap K)$ và $M_2 = A_2 \oplus B_2$ để $B_2 \cap (K \cap M_2) = B_2 \cap K =_m B_2$. Lúc đó

$M = A_1 \oplus A_2 \oplus B_1 \oplus B_2, A_1 \oplus A_2 \leq K$ và $(B_1 \oplus B_2) \cap K \subseteq (B_1 \cap K) \oplus (B_2 \cap K) =_m M_1 \oplus M_2$

Vậy M là môđun nâng đơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] F.W.Anderson and K.R.Fuller (1974), Rings and Categories of Modules, *Springer-Verlag*, New York.

[2] J.Clark, C.Lomp, N.Vanaja and R.Wisbauer (2006), Lifting Modules, *Frontiers in Mathematics*, Birkhauser.

[3] M.T.Kosan (2005), The Lifting Condition and Fully Invariant Submodules, *East-West Journal of Math*, 7(1) (2005) 99-106.

[4] Y. Wang and N. Ding (2006), Generalized Supplemented Modules, *Taiwanese J. Mathematics*, 10 (2006), 1589-1601.

[5] Wisbauer R. (1991), Foundations of Module and Ring Theory; *Gordon and Breach: Reading*.