UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN & GIÁO DỤC

HÀM PHÂN THỨC CHÍNH QUY VÀ ỨNG DỤNG

Nguyễn Thị Sinh

Nhận bài:
07 – 11 – 2015
Chấp nhận đăng:
01 – 03 – 2016
http://jshe.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Trong chương trình toán phổ thông, phân thức hữu tỷ là một trong những khái niệm cơ bản. Đã có rất nhiều dạng toán về dãy số, đẳng thức, bất đẳng thức, phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, hệ bất phương trình,… liên quan đến các hàm số dạng phân thức. Chính vì thế, việc nắm bắt các tính chất của các hàm phân thức và vận dụng được tính đặc thù của các biểu thức phân thức đã cho để giải các dạng toán này là thực sự cần thiết. Bài báo này đề cập đến một lớp hàm số có cấu trúc đặc biệt, đó là hàm phân thức chính quy. Chứng minh định lý cơ bản về giá trị nhỏ nhất của hàm phân thức chính quy, đồng thời nêu lên ứng dụng của hàm phân thức chính quy trong việc giải một số dạng toán thường gặp như các bài toán cực trị, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức…

Từ khóa: Hàm phân thức; hàm phân thức chính quy; hàm phân thức chính quy và ứng dụng; bất đẳng thức; giá trị nhỏ nhất.

1. Hàm phân thức chính quy một biến [1]

Định nghĩa 1.1. Hàm số $f(x)\not\equiv 0$ xác định trên tập $\mathbb{R}^+$,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i}$$

được gọi là một hàm phân thức chính quy nếu

$$\begin{cases} a_i \ge 0, \quad \forall i=\overline{1,n} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\alpha_i = 0 \end{cases}$$

Ví dụ: Hàm số sau đây là hàm phân thức chính quy

$$f(x)=3+2x+4x^2+x^3+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^3}$$

Nhận xét 1.1. Với mọi hàm phân thức dạng

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i}, a_i \ge 0, \quad i=1,2,...,n$$

thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1+a_2+...+a_n = p \\ a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n = q \end{cases} \qquad (p>0)$$

thì hàm số $f(x)=g(x)x^{-\frac{q}{p}}$ là một hàm phân thức chính quy.

Chứng minh. Ta có

$$f(x)=g(x)x^{-\frac{q}{p}}=\sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i-\frac{q}{p}}$$

Lại có

$$a_1\left(\alpha_1-\frac{q}{p}\right)+a_2\left(\alpha_2-\frac{q}{p}\right)+...+a_n\left(\alpha_n-\frac{q}{p}\right)$$
$$=\left(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n\right)$$
$$-\frac{q}{p}(a_1+a_2+...+a_n)=0$$

Vậy $f(x)$ là một hàm phân thức chính quy.

Tính chất 1.1. Nếu $f(x)$ là hàm phân thức chính quy thì $f(x)>0$ với mọi $x>0$.

*** Liên hệ tác giả**
Nguyễn Thị Sinh
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng
Email: sinhsp@gmail.com

Tính chất 1.2. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm phân thức chính quy thì với mọi cặp số dương α, β, hàm số

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

cũng là một hàm phân thức chính quy.

Tính chất 1.3. Nếu $f(x)$ là một hàm phân thức chính quy thì hàm số

$$h(x) = \left[f(x)\right]^m, \quad m \in \mathrm{N}^*$$

cũng là hàm phân thức chính quy.

2. Hàm phân thức chính quy nhiều biến [1]

Định nghĩa 2.1. Hàm số $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ được gọi là một hàm phân thức chính quy trên tập $\mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+ \times \mathrm{K} \times \mathrm{R}^+$ nếu nó có dạng

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_1^{\alpha_{i1}} x_2^{\alpha_{i2}} ... x_n^{\alpha_{in}},$$

không đồng nhất bằng 0, trong đó $a_i \geq 0, \quad i = 1,2,...m$ và

$$\begin{cases} a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{21} + ... + a_m\alpha_{m1} = 0 \\ a_1\alpha_{12} + a_2\alpha_{22} + ... + a_m\alpha_{m2} = 0 \\ ... \\ a_1\alpha_{1n} + a_2\alpha_{2n} + ... + a_m\alpha_{mn} = 0 \end{cases}$$

Định nghĩa 2.2. Giả sử $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ là hàm phân thức chính quy trong Định nghĩa 2.1, khi đó các hàm số

$$f_j(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_j^{\alpha_{ij}}, \quad j = 1, 2, ..., n$$

được gọi là phân thức thành phần biến x_j của $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

Ví dụ: Hàm phân thức chính quy

$f(x, y) = 2x^{\frac{-4}{3}} y^{\frac{-1}{7}} + 2x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{2}{7}} + x^{\frac{-2}{3}} y^{\frac{-2}{7}}$ có các hàm phân thức thành phần:

$$f_1(x) = 2x^{\frac{-4}{3}} + 2x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{-2}{3}}$$

$$f_2(y) = 2y^{\frac{-1}{7}} + 2y^{\frac{2}{7}} + y^{\frac{-2}{7}}$$

Định lý 2.1. Hàm số $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ là một hàm phân thức chính quy khi và chỉ khi các hàm phân thức thành phần của $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ cũng đều là các hàm phân thức chính quy.

Định lý 2.2. Với mỗi hàm phân thức chính quy dạng

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_1^{\alpha_{i1}} x_2^{\alpha_{i2}} ... x_n^{\alpha_{in}}$ và với mọi $x \in \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+ \times \mathrm{K} \times \mathrm{R}^+$ ta đều có

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \geq \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Chứng minh. Vận dụng bất đẳng thức trung bình cộng - trung bình nhân suy rộng cho hai bộ số dương

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_{1i}}, \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_{21i}}, ..., \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_{mi}};$$

$$a_1, a_2, ..., a_m;$$

ta có: $\dfrac{f(x_1, x_2, ..., x_n)}{a_1 + a_2 + ... + a_m}$

$$\geq \left(x_1^{\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_{i1}} x_2^{\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_{i2}} ... x_n^{\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_{in}} \right)^{\frac{1}{a_1 + a_2 + ... + a_m}} = 1$$

Từ đó suy ra

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \geq \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$$

Hệ quả 2.1. Với mỗi hàm phân thức chính quy $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ trên tập $\mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+ \times \mathrm{K} \times \mathrm{R}^+$, ta đều có

$$\min f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(1,1, ..., 1).$$

3. Một số ứng dụng của hàm phân thức chính quy

Các kết quả về hàm phân thức chính quy thu được trong các mục trên có thể ứng dụng để giải các bài toán về cực trị, chứng minh bất đẳng thức, …

Bài toán 3.1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau trong miền các biến dương

$$a)\quad f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt[2^n]{x^{2n+3}}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{\sqrt[2^i]{x}}$$

$$b)\quad g(x,y) = y^n x^{\frac{-n}{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} x^{\frac{1}{i+1}} \frac{1}{iy^i}$$

Giải. a) Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(4i+2)-(2i+3)}{2^i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i+1}{2^{i-1}} - \frac{2i+3}{2^i} \right)$$

$$= 3 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - \frac{7}{2^2} + \ldots + \frac{2n+1}{2^{n-1}} - \frac{2n+3}{2^n}$$

$$= 3 - \frac{2n+3}{2^n}$$

nên

$$3 - \frac{2n+3}{2^n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2^i} = 0$$

Suy ra $f(x)$ là một hàm phân thức chính quy. Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là

$$f(1) = 2 + \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 2 + n^2$$

b) Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

nên $\quad \dfrac{-n}{n+1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 0$

và $\quad n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(-i)}{i} = 0$

Suy ra $g(x,y)$ là một hàm phân thức chính quy.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $g(x,y)$ là

$$g(1,1) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Bài toán 3.2. Cho $a,b \geq 0$ và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ với $p,q > 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (*)$$

Giải. Bất đẳng thức $(*)$ rõ ràng đúng nếu $ab = 0$, do đó ta chỉ cần chứng minh $(*)$ khi $a > 0$ $, b > 0$.

Nhận thấy khi $a > 0$ $, b > 0$ bất đẳng thức $(*)$ tương đương với

$$\frac{1}{p} a^{p-1} b^{-1} + \frac{1}{q} a^{-1} b^{q-1} \geq 1$$

Xét hàm

$$f(a,b) = \frac{1}{p} a^{p-1} b^{-1} + \frac{1}{q} a^{-1} b^{q-1}$$

Rõ ràng $f(a,b)$ là một hàm phân thức chính quy đối với hai biến a, b vì

$$\begin{cases} \dfrac{p-1}{p} - \dfrac{1}{q} = 1 - \left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \right) = 0 \\ \dfrac{-1}{p} + \dfrac{q-1}{q} = 1 - \left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \right) = 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$f(a,b) \geq f(1,1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Vậy bất đẳng thức $(*)$ đã được chứng minh.

Bài toán 3.3. Cho $x, y > 0$ Chứng minh rằng

$$\frac{7}{x^6} + \frac{3x^2}{y^8} - \frac{12}{x^3 y^2} \geq -2$$

Giải. Ta đưa bài toán về dạng phân thức chính quy để áp dụng các tính chất của nó. Thật vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$7x^{-3}y^2 + 3x^5 y^{-6} + 2x^3 y^2 \geq 12$$

Xét hàm

$$f(x,y)=7x^{-3}y^{2}+3x^{5}y^{-6}+2x^{3}y^{2}$$

Nhận xét rằng $f(x,y)$ là một hàm phân thức chính quy hai biến vì

$$\begin{cases}7.(-3)+3.5+2.3=0\\ 7.2+3.(-6)+2.2=0\end{cases}$$

Áp dụng định lý 2.2 cho hàm phân thức chính quy $f(x,y)$, ta thu được

$$f(x,y)\geq f(1,1)=12.$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh xong.

Bài toán 3.4. Cho a,b,c là ba số thực dương, chứng minh rằng

$$a)\quad 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{2}{abc}\geq 11$$

$$b) S=\sqrt{\frac{5}{a^2}+\frac{9b^2}{2}+\frac{c^2a^2}{4}}+\sqrt{\frac{5}{b^2}+\frac{9c^2}{2}+\frac{a^2b^2}{4}}+\sqrt{\frac{5}{c^2}+\frac{9a^2}{2}+\frac{b^2c^2}{4}}\geq\frac{3}{2}\sqrt{39}$$

Giải. a) Xét hàm số

$$f(a,b,c)=2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{2}{abc}$$

Dễ dàng kiểm tra được $f(a,b,c)$ là một hàm phân thức chính quy, vậy nên

$$f(a,b,c)\geq f(1,1,1)=11$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$\sqrt{5+\frac{9}{2}+\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{5}{a^2}+\frac{9b^2}{2}+\frac{c^2a^2}{4}}\geq\frac{5}{a}+\frac{9b}{2}+\frac{ca}{4}$$

$$\sqrt{5+\frac{9}{2}+\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{5}{b^2}+\frac{9c^2}{2}+\frac{a^2b^2}{4}}\geq\frac{5}{b}+\frac{9c}{2}+\frac{ab}{4}$$

$$\sqrt{5+\frac{9}{2}+\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{5}{c^2}+\frac{9a^2}{2}+\frac{b^2c^2}{4}}\geq\frac{5}{c}+\frac{9a}{2}+\frac{bc}{4}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{\sqrt{39}}{2}S\geq 5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{9}{2}(a+b+c)+\frac{1}{4}(ab+bc+ca)$$

Đặt $$g(a,b,c)=5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{9}{2}(a+b+c)+\frac{1}{4}(ab+bc+ca)$$

Ta nhận thấy $g(a,b,c)$ là một hàm phân thức chính quy, nên

$$g(a,b,c)\geq g(1,1,1)=\frac{117}{4}$$

Hay $$S\geq\frac{3}{2}\sqrt{39}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

4. Kết luận

Bài báo đã giới thiệu một lớp hàm số có cấu trúc đặc biệt, đó là các hàm phân thức chính quy cùng với các tính chất của chúng, đồng thời nêu lên ứng dụng của các hàm phân thức chính quy trong việc giải một số dạng toán sơ cấp thường gặp.

Tài liệu tham khảo

[1] Trần Đức Huyên (1993), Bất đẳng thức, Nhà xuất bản Trẻ.

[2] Nguyễn Văn Mậu (2006), Bất đẳng thức - Định lý và áp dụng, Nhà xuất bản Giáo dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu (2007), Các bài toán nội suy và áp dụng, Nhà xuất bản Giáo dục.

[4] Bộ Giáo dục và Đào tạo – Hội Toán học Việt Nam (1997), Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và tuổi trẻ, Nhà xuất bản Giáo dục.

REGULAR RATIONAL FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS

Abstract: In the high school mathmatics curriculum, the notion of rational functions is one of the basic concepts. There are many types of math problems about sequences, equalities, inequalities, equations, inequations, systems of equations, systems of inequations,… that are related to the rational functions. Therefore, it is really necessary to grasp the properties of the rational functions and to apply the distinctive character of the given functions in solving these types of maths problems. This paper presents a class of functions with special structures, which are regular rational functions. We have proved a fundamental theorem on the minimum values of regular rational functions, and then gived some applications of the regular rational functions in solving a number of common types of maths problems such as extrema, equalities, inequalities,…

Key words: rational function; regular rational functions; regular rational functions and their applications; inequalities; minimum value.