UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

ỨNG DỤNG TÍNH CHẤT SAI PHÂN ĐỂ TÍNH TỔNG CỦA DÃY TRUY HỒI TUYẾN TÍNH

Nhận bài:
05 – 10 – 2018
Chấp nhận đăng:
25 – 12 – 2018
http://jshe.ued.udn.vn/

Lê Hải Trung

Tóm tắt: Bài báo trình bày về việc ứng dụng một số tính chất của sai phân trong việc tính tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ của một dãy truy hồi tuyến tính cấp k: $u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + ... + a_k u_n$. Dưới cách nhìn của l í thuyết sai phân thì số hạng tổng quát u_n của một dãy số được xem như một ẩn hàm của một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng thuần nhất. Việc đi tính tổng của dãy số ban đầu $\{u_n\}$ được đưa về việc giải một phương trình sai phân tuyến tính, với tổng của dãy chính là một nghiệm riêng của phương trình này. Phương trình đặc trưng của tổng dãy số $\{u_n\}$ được xác định thông qua phương trình đặc trưng của phương trình $u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + ... + a_k u_n$ với số hạng tổng quát u_n (đóng vai trò là ẩn). Đồng thời bài báo cũng trình bày một số để minh hoạ cho phương pháp đã nêu.

Từ khóa: phương trình sai phân; tính tổng; dãy truy hồi; chuỗi số; Fibonacci.

1. Đặt vấn đề

Bài toán đi tính tổng của một dãy số luôn là một chủ đề thú vị không chỉ đối với giáo viên và học sinh khối phổ thông trung học. Ví dụ, ngay từ khi xuất hiện dãy số Fibonacci thì ngoài việc làm thế nào có thể xác định được số hạng tổng quát của nó thì việc đi tính tổng của n số hạng đầu tiên của dãy số này cũng là một câu hỏi thu hút đối với các nhà toán học cùng thời đại. Khi nghiên cứu sâu về dãy số này thì trên cơ sở xây dựng được phương trình tỉ lệ vàng (sau này ta gọi nó là phương trình đặc trưng, sẽ được đề cập tại phần sau của bài viết này) thì người ta thu được giá trị của một nghiệm chính bằng $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6,$ mà sau này người ta gọi đây là tỉ lệ vàng và để cho các nghệ sĩ và kiến trúc sư bắt đầu tính toán và xây dựng sao cho các tác phẩm của họ xấp xỉ tỉ số vàng này (các bút tích về tỉ lệ vàng này được tìm thấy trong quá trình khai quật các kim tự tháp tại Ai cập). Hiểu nôm na, chẳng hạn như khi thiết kế một cánh cửa, một ô của sổ hoặc một bức tranh thì người ta cố gắng để tỉ lệ giữa chiều dài và chiều rộng có giá trị gần (hoặc) bằng 1.6. Nếu ta chú ý một sản phẩm của tạo hoá là gương mặt của người phụ nữ thì rõ ràng tỉ lệ trên làm cho chúng ta hướng tới với một ánh mắt vô cùng thiện cảm.

Ta đặt vấn đề là liệu có một phương pháp nào đấy để ngoài việc thoả mãn là một phương tiện để đi tìm số hạng tổng quát, hay tính tổng của một dãy số (được hiểu theo nghĩa là tuân theo một quy ước định sẵn) thì còn có thể cung cấp cho giáo viên và sinh viên, học sinh một phương pháp có thể sáng tác ra nhiều bài toán liên quan đến vấn đề nêu trên hay không? Chủ đề của bài viết sẽ cố gắng đáp ứng phần nào các yêu cầu đã nêu trên.

2. Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết

Định nghĩa 2.1 (xem [1,2]). *Sai phân cấp một của* $f(i)$ *được kí hiệu là* $\Delta f(i)$ *và xác định bởi:*

$$\Delta f(i) = f(i+1) - f(i).$$

* Tác giả liên hệ
Lê Hải Trung
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng
Email: lhtrung@ued.udn.vn

Tuỳ từng mục đích người ta có thể lấy $i \in$ ¡ hoặc $i \in$ ¢. Trong nội dung bài báo này ta chọn $i \in$ ¢. Và để tạo sự nhất quán về mặt kí hiệu, sau này khi viết f_i thì ta hiểu là $f(i)$.

Định nghĩa 2.2. *Dãy $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ được gọi là dãy truy hồi tuyến tính cấp k, nếu tồn tại các số $a_1, a_2, ..., a_k, (a_k \neq 0)$ sao cho:*

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + ... + a_k u_n \qquad (1)$$

Như vậy trong dãy truy hồi tuyến tính cấp *k* thì mỗi số hạng, được bắt đầu từ số thứ tự thứ $k+1$ được biểu diễn qua đúng *k* số lượng phần tử đứng trước nó. Dễ thấy rằng một dãy truy hồi tuyến tính cấp k được xác định một cách duy nhất, nếu như k phần tử đầu tiên $u_1, u_2, ..., u_k$ của dãy được cho trước. Thuật ngữ "truy hồi" được xuất hiện trong tiếng Pháp "recurrente". Thực tế cho thấy rằng, để tính được các phần tử (phía) sau của dãy truy hồi tuyến tính thì ta cần quay ngược lại đến các phần tử đứng trước đó.

Ví dụ 2.1. Đối với cấp số nhân thì phương trình (4.1) có dạng $u_{n+1} = q u_n, u_n \neq 0$. Vì lẽ ấy nên cấp số nhân còn được gọi là dãy truy hồi tuyến tính cấp một.

Ví dụ 2.2. Ta biết rằng một cấp số cộng luôn có dạng $u_{n+1} = u_n + d$, và như thế theo định nghĩa đây không thể là một dãy truy hồi tuyến tính cấp một. Thế nhưng từ hai đẳng thức: $u_{n+2} = u_{n+1} + d$ và $u_{n+1} = u_n + d$, ta có được $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Như thế cấp số cộng còn được gọi là dãy truy hồi tuyến tính cấp hai. Chúng ta hãy thử cùng nhau kiểm tra dãy với phần tử tổng quát $u_n = n^2$ có là dãy truy hồi tuyến tính cấp ba hay không? Hiển nhiên u_n đã cho thỏa mãn phương trình:

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n. \qquad (*)$$

Dưới cách nhìn của Lí thuyết phương trình sai phân thì một dãy truy hồi tuyến tính cấp k chính là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất cấp k với hệ số hằng. Cho trước k phần tử đầu tiên của dãy truy hồi tương đương với việc cho trước các điều kiện đầu của bài toán Cauchy của phương trình sai phân. Lí thuyết nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng cho phép tìm được công thức số hạng tổng quát của dãy truy hồ (xem [1-5]). Ta sẽ minh chứng lời nói trên thông qua ví dụ cụ thể sau đây.

Ví dụ 2.3. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy Fibonacci (xem [1]):

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n; u_1 = u_2 = 1.$$

Lời giải. Phương trình đặc trưng của phương trình trên có dạng:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

và cho ta hai nghiệm $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho được biểu diễn bởi:

$$u_n = C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Giá trị C_1, C_2 được xác định thông qua các giá trị đầu $u_1 = u_2 = 1$. Ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1, \\ C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta nhận được $C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Như thế công thức của số hạng tổng quát của dãy Fibonaci có dạng:

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

và còn có tên gọi là công thức Beni.

Trong bài báo này sẽ trình bày phương pháp để tính tổng của một dãy truy hồi dạng (1) và thông qua đó, ta có thể sáng tác những bài tập tương tự.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Định lí 2.1. *Nếu $\{u_n\}$ là một dãy truy hồi tuyến tính cấp k thoả mãn (1) thì dãy $\{S_n\}$ với:*

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \qquad (2)$$

là một dãy truy hồi tuyến tính cấp $k+1$.

Chứng minh. Hiển nhiên ta có:

$$u_m = S_m - S_{m-1}$$

và từ phương trình (1) ta có được:

$$S_{n+k} - S_{n+k-1} = a_1(S_{n+k-1} - S_{n+k-2}) + ...$$
$$+ a_{k-1}(S_{n+1} - S_n) + a_k(S_n - S_{n-1}).$$

hay

$$S_{n+k} = (a_1+1)S_{n+k-1} + (a_2 - a_1)S_{n+k-2} + ...$$
$$+ (a_k - a_{k-1})S_n - a_k S_{n-1}.$$

Trong hệ thức cuối ta đổi $n-1$ thành n và nhận được:

$$S_{n+k+1} = (a_1+1)S_{n+k} + (a_2 - a_1)S_{n+k-1} + ...$$
$$+ (a_k - a_{k-1})S_{n+1} - a_k S_n. \tag{3}$$

Đây chính là phương trình mô tả dãy truy hồi tuyến tính cấp $k+1$.

Định lí trên có giá trị hết sức quan trọng trong việc đi tính tổng (2), bởi lẽ để đi xác định (2) ta chuyển về bài toán đi giải phương trình sai phân thuần nhất cấp $k+1$ với hệ số hằng (3).

Định lí 2.2. *Nếu $P(\lambda)$ là phương trình đặc trưng của phương trình (1) thì $Q(\lambda) = (\lambda - 1)P(\lambda)$ là phương trình đặc trưng của phương trình (3).*

Chứng minh. Hiển nhiên phương trình đặc trưng của (3) có dạng:

$$Q(\lambda) = \lambda^{k+1} - (a_1+1)\lambda^k - (a_2 - a_1)\lambda^{k-1} - ...$$
$$-(a_k - a_{k-1})\lambda - a_k = 0. \tag{4}$$

Rõ ràng (4) có một nghiệm $\lambda = 1$, do đó ta tiến hành chia (4) cho $(\lambda - 1)$ và nhận được:

$$Q(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^k - a_1\lambda^{k-1} - a_2\lambda^{k-2} - ... - a_k) = 0.$$

Biểu thức: $P(\lambda) = (\lambda^k - a_1\lambda^{k-1} - a_2\lambda^{k-2} - ... - a_k) = 0,$ chính là phương trình đặc trưng của (1). Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.4. [1, tr.2] Để dễ dàng tiếp cận ta có thể quay trở lại với phương trình (*). Ta cần đi tính tổng trong trường hợp này là:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2. \tag{5}$$

Lời giải. Vì phương trình đặc trưng của (*) là:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

nên phương trình đặc trưng đối với S_n là:

$$(\lambda - 1)(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = (\lambda - 1)^4 = 0.$$

Từ đây ta có được:

$$S_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + C_4 n^3.$$

Với $n = 0, S_0 = 0,$ do đó $C_1 = 0.$

Với $n = 1, S_1 = 1,$ ta có được: $C_2 + C_3 + C_4 = 1.$

Với $n = 2, S_2 = 5,$ ta có: $2C_2 + 4C_3 + 8C_4 = 5.$

Với $n = 3, S_3 = 14,$ ta có: $3C_2 + 9C_3 + 27C_4 = 14.$

Kết hợp các phương trình nhận được cho ta hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_2 + C_3 + C_4 = 1, \\ 2C_2 + 4C_3 + 8C_4 = 5, \\ 3C_2 + 9C_3 + 27C_4 = 14. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta thu được:

$$C_2 = \frac{1}{6}, C_3 = \frac{1}{2}, C_4 = \frac{1}{3}.$$

Như thế:

$$S_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

và đây là kết quả quen thuộc.

Ví dụ 2.5. Tính tổng:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k\alpha, \ \alpha \in ¡ .$$

Lời giải. Rõ ràng $\sin n\alpha$ là nghiệm của phương trình:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1}\cos\alpha + u_n = 0$$

với phương trình đặc trưng là:

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$$

do đó theo định lí 2.2 thì S_n là nghiệm của phương trình sai phân với phương trình đặc trưng là:

$$(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda\cos\alpha+1)=0.$$

Như thế S_n được xác định bởi:

$$S_n=C_1+C_2\sin n\alpha+C_2\cos n\alpha.$$

Từ $S_0=0, S_1=\sin\alpha, S_1=\sin\alpha+\sin 2\alpha$ ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1+C_3=0, \\ C_1+C_2\sin\alpha+C_3\cos\alpha=\sin\alpha, \\ C_1+C_2\sin 2\alpha+C_3\cos 2\alpha=\sin\alpha+\sin 2\alpha. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta thu được:

$$C_1=\frac{1+\cos\alpha}{2\sin\alpha},\ C_2=\frac{1}{2},\ C_1=-\frac{1+\cos\alpha}{2\sin\alpha},$$

và như thế ta thu được:

$$S_n=\frac{1+\cos\alpha}{2\sin\alpha}\left(1-\cos n\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin n\alpha.$$

Sau khi biến đổi ta nhận được:

$$S_n=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Chú ý rằng $S_n=0$ khi $\alpha=2n\pi, n\in ¢$. Tóm lại:

$$S_n=\begin{cases} \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, & \alpha\neq 2n\pi, \\ 0, & \alpha=2n\pi. \end{cases}$$

Nhận xét 2.1. Trong ví dụ này ta chưa biết $\sin n\alpha$ là số hạng tổng quát của dãy truy hồi tuyến tính nào, do đó ta cần "nhẩm" một phương trình sai phân tuyến thuần nhất với hệ số hằng để cho $\sin n\alpha$ là nghiệm. Phương pháp này đặc biệt hữu dụng khi ta cần tính tổng của chuỗi mà đã biết số hạng tổng quát.

Ví dụ 2.6. (Phát triển từ đề thi chọn đội tuyển Việt Nam thi Toán quốc tế 2012, bài 4)[1]:

Cho dãy $\{u_n\}$ được xác định bởi:

$u_1=1, u_2=2011, u_{n+2}=4022u_{n+1}-u_n, n\in ¥$. Tính tổng của:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k.$$

Lời giải. Trong ví dụ này dạng truy hồi tuyến tính của dãy $\{u_n\}$ được xác định, thế nên để tính tổng S_n ta đi giải phương trình đặc trưng tương ứng có dạng:

$$(\lambda-1)(\lambda^2-4022\lambda+1)u_{n+2}=0$$

và khi đó:

$$S_n=C_1+C_2\left(2011+2\sqrt{1011030}\right)^n+$$
$$C_3\left(2011-2\sqrt{1011030}\right)^n.$$

Sử dụng các điều kiện $S_1=1,\ S_2=2012,$ $S_3=8088442,$ ta được:

$$C_1=\frac{3821}{4020},\ C_2=\frac{1457533\sqrt{\frac{5}{202206}}}{8}-\frac{7284041}{8040},$$

$$C_3=-\frac{1457533\sqrt{\frac{5}{202206}}}{8}-\frac{7284041}{8040},$$

---

[1]Cho dãy $\{u_n\}$ được xác định bởi: $u_1=1, u_2=2011, u_{n+2}=4022u_{n+1}-u_n, n\in ¥$. Chứng minh rằng $\frac{u_{2012}+1}{2012}$ là số chính phương.

và như thế:

$$S_n = \frac{3821}{4020} + \left(\frac{1457533\sqrt{\frac{5}{202206}}}{8} - \frac{7284041}{8040} \right) \times \left(2011 + 2\sqrt{1011030}\right)^n - \left(\frac{1457533\sqrt{\frac{5}{202206}}}{8} + \frac{7284041}{8040} \right) \times \left(2011 - 2\sqrt{1011030}\right)^n .$$

Dựa trên các kết quả đạt được ta có thể đưa ra phương pháp sáng tác các bài tập như sau:

Bước 1: Xác định số hạng tổng quát u_n của dãy $\{u_n\}$ là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng nào?

Bước 2: Giải phương trình sai phân tuyến tính (cần sử dụng kiến thức trong các tài liệu [1-5]) để xác định u_n.

Bước 3: Thiết lập phương trình đặc trưng của S_n thông qua Định lí 2.2. từ đó xác định được S_n.

Bước 4: Sử dụng các điều kiện đầu đối với $\{S_n\}$ để viết ra kết quả cuối cùng.

Ta có thể đề xuất một vài ví dụ sau đây:

Ví dụ 2.7. Tính các tổng sau đây:

$$S_{2019} = \sum_{k=0}^{2019} \cos\frac{k\pi}{3}; S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \sin\frac{k\pi}{4}.$$

$$S_{2019} = \sum_{k=0}^{2019} (-1)^k (k^2 - 2k + 3);$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)3^k \cos k\pi.$$

Ghi chú 2.1. Các kiến thức cơ bản về phương trình sai phân như: Giải phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất, thiết lập phương trình đặc trưng, hệ nghiệm cơ sở… ta có thể xem tại các tài liệu [1, 3, 5]. Việc phân loại và giải quyết phương trình sai phân với hệ số hằng có thể tham khảo tại các tài liệu số [2, 4].

3. Kết luận

Trong bài báo đã đưa ra phương pháp để đi tính tổng của một dãy số với số hạng tổng quát của nó chính là nghiệm của một phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng (hay còn gọi là dãy truy hồi). Khi đó tổng của dãy này được xây dựng chính là một nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng với phương trình đặc trưng được tính thông qua phương trình đặc trưng của phương trình với số hạng tổng quát đã cho.

Tài liệu tham khảo

[1] Arne Jensen (2011). *Lecture Notes on Difference Equations*. Aalborg University, Fr. Bajers Vej 7G.

[2] Võ Thị Ni Na (2016). *Hệ động lực học dạng phương trình sai phân bậc nhất*. Luận văn thạc sĩ, Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng.

[3] Saber Elaydi (2005). *An Introduction to Difference Equation*. Trinity University.

[4] Nguyễn Tiến Tuấn (2015). *Phương trình sai phân và ứng dụng*. Luận văn thạc sĩ, Đại học Quốc gia Hà Nội.

[5] Lê Đình Thịnh (2004). *Phương pháp sai phân*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

APPLYING PROPERTIES OF DIFFERENCES TO FIND THE SUM OF LINEAR RECURRENCE SEQUENCES

Abstract: The paper presents the application of some properties of differences to find(calculate) the sum $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ of a recurrence sequence of degree k: $u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + ... + a_ku_n$. In the Difference Theory, the n-th terms u_n of the sequence is considered to an implicit function of a linear difference equation with constant coefficients. Taking the sum of the initial sequence $\{u_n\}$ is taken to solve a linear difference equation, with the sum of the sequence is a partial solution of this equation. The characteristic equation of the total of sequence $\{u_n\}$ is determined through the characteristic equation of the equation $u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + ... + a_ku_n$ with the general term u_n. Finally,the article presented some illustrative examples.

Key words: difference equations; total; recurrence sequences; series; Fibonacci.