UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

TÍNH ĐỐI NGẪU DẠNG WOLFE CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU TUYẾN TÍNH VỚI RÀNG BUỘC CÂN BẰNG

Trần Văn Sự[a*], Lê Xuân Hòa[b]

Nhận bài:
15 – 10 – 2018
Chấp nhận đăng:
25 – 12 – 2018
http://jshe.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Đối ngẫu có vai trò quan trọng trong nghiên cứu các bài toán quy hoạch toán học vì tính đối ngẫu yếu cung cấp một chặn dưới đối với hàm mục tiêu của bài toán ban đầu (hay bài toán gốc). Trong bài báo này chúng tôi xây dựng và nghiên cứu một mô hình đối ngẫu dạng Wolfe cho bài toán tối ưu tuyến tính với ràng buộc cân bằng. Đầu tiên chúng đề xuất mô hình đối ngẫu dạng Wolfe và cung cấp một ví dụ để minh họa cho mô hình đối ngẫu. Thứ hai, chúng tôi thiết lập các định lí về tính đối ngẫu mạnh và tính đối ngẫu yếu cho cặp bài toán gốc (LOPEC) và bài toán đối ngẫu dạng Wolfe (DWLOPEC). Cuối cùng chúng tôi trình bày một ví dụ để mô tả kết quả về tính đối ngẫu mạnh trong giấy.

Từ khóa: bài toán tối ưu tuyến tính với ràng buộc cân bằng; đối ngẫu dạng Wolfe; định lí đối ngẫu mạnh; định lí đối ngẫu yếu; ánh xạ tuyến tính.

1. Giới thiệu

Đối ngẫu là một chủ đề quan trọng trong nghiên cứu các bài toán quy hoạch toán học, chẳng hạn tính đối ngẫu yếu cung cấp giá trị chặn dưới cho hàm mục tiêu. Tương tự như trong bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát, khi thiết lập một mô hình đối ngẫu cho bài toán ban đầu (hay còn gọi là bài toán gốc), các định lí về tính đối ngẫu yếu và tính đối ngẫu mạnh cho cặp bài toán gốc và bài toán đối ngẫu luôn giữ một vai trò chủ đạo và thường được nghiên cứu trước tiên, xem, chẳng hạn [1, 2, 3, 4, 5].

Trong bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát, tính đối ngẫu được thiết lập phụ thuộc vào biến và dấu, nghĩa là bài toán gốc chọn biến x, bài toán đối ngẫu chọn biến y, dấu của y phụ thuộc vào ràng buộc đẳng thức hay bất đẳng thức của bài toán gốc và ngược lại. Các hệ số của hàm mục tiêu của bài toán gốc được lấy làm chặn trên của bài toán đối ngẫu "max" và chặn dưới của bài toán gốc "min" được chọn làm hệ số của bài toán đối ngẫu "max". Ma trận ràng buộc bài toán gốc "min" được chuyển thành ma trận chuyển vị của bài toán đối ngẫu "max" và ngược lại. Tuy nhiên, mô hình đối ngẫu trên lại không phù hợp với lớp bài toán tối ưu tuyến tính với ràng buộc cân bằng. Đối với mô hình đối ngẫu dạng Wolfe (xem Wolfe [4]), tính đối ngẫu giữa các biến không xảy ra, đây là vấn đề thuận lợi để xây dựng các thuật toán với thời gian chạy chương trình nhanh hơn.

Gần đây, thông qua các tài liệu trình bày về mô hình đối ngẫu dạng Wolfe (xem [1,2,3,4,5]), ta thấy rằng khi xây dựng một mô hình đối ngẫu dạng Wolfe cần công cụ là các đạo hàm theo hướng và dưới vi phân phù hợp để thiết lập mô hình đối ngẫu cũng như các định lí đối ngẫu mạnh và yếu. Tuy nhiên đối với các hàm tuyến tính, đạo hàm theo hướng đạt được ngay tại phương lấy đạo hàm. Do đó, chúng ta không cần sử dụng một công cụ đạo hàm nào hay dạng dưới vi phân nào áp đặt lên bài toán đối ngẫu dạng Wolfe, mà có thể xây dựng trực tiếp mô hình đối ngẫu dạng Wolfe như trong bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát.

Mục đích của chúng tôi trong bài báo này là đề xuất mô hình đối ngẫu dạng Wolfe cho bài toán tối ưu tuyến tính với ràng buộc cân bằng. Tiếp theo chúng tôi

[a]*Trường Đại học Quảng Nam*
[b]*Trường Đại học Kiến trúc Đà Nẵng*
*** Tác giả liên hệ**
Trần Văn Sự
Email: tranuu63@gmail.com

nghiên cứu các định lí về tính đối ngẫu mạnh và về tính đối ngẫu yếu của cặp bài toán gốc và bài toán đối ngẫu dạng Wolfe. Kết quả thu được của chúng tôi trong bài báo này là mới và chưa từng được nghiên cứu trước đây, và trong tương lai chúng có thể được xem xét mở rộng để nghiên cứu cho lớp bài toán quy hoạch phi tuyến với ràng buộc cân bằng.

2. Cơ sở lí thuyết

2.1. Các kí hiệu

Kí hiệu

¥ : Tập các số tự nhiên;

¡ : Tập các số thực;

$< x,\ y >= x^T y$ với mọi $x, y \in ¡^{\ s}$, trong đó s là số tự nhiên, ở đây x^T là ma trận cột của vectơ dòng *x*,

X, Y: Không gian Banach thực,

$\|\ .\ \|$: Chuẩn trong không gian Banach thực.

2.2. Các định nghĩa

Định nghĩa 2.2.1. Một ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là tuyến tính nếu

$$f(\mathrm{ax} + by) = \mathrm{af}(x) + bf(y)$$
$$\forall x, y \in X,\ \ \forall a, b \in ¡ .$$

Định nghĩa 2.2.2. Xét bài toán gốc (P):

$$\min\ f(x) \text{ với } x \in K \subset X.$$

Ta nói rằng:

a) Vectơ $\bar{x} \in K$ là một nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán gốc (P) nếu

$$f(x) \geq f(\bar{x})\ \ \forall x \in K.$$

b) Vectơ $\bar{x} \in K$ là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán gốc (P) nếu $f(x) \geq f(\bar{x}) \forall x \in K \cap \left\{ y \in X : \left\| y - \bar{x} \right\| < \delta \right\}$ với số dương δ nào đấy.

Chú ý 1: Bài toán "max" được định nghĩa một cách tương tự.

Chú ý 2: Mỗi vectơ $\bar{x} \in K$ được gọi là điểm chấp nhận được cho bài toán gốc (P).

3. Mô hình đối ngẫu dạng Wolfe

Chúng ta xét bài toán bài toán tối ưu tuyến tính với ràng buộc cân bằng:

$$(LOPEC):\ \min_{x \in C} f(x)$$
$$g(x) \leq 0,\ h(x) = 0,$$
$$G(x) \geq 0,\ H(x) \geq 0,$$
$$< G(x),\ H(x) >= 0.$$

Trong đó: $f : ¡^{\ q} \to ¡$, $g : ¡^{\ q} \to ¡^{\ m}$,

$h : ¡^{\ q} \to ¡^{\ n}$, $G : ¡^{\ q} \to ¡^{\ p}$, $H : ¡^{\ q} \to ¡^{\ p}$

là các hàm tuyến tính. Tập chấp nhận được của (LOPEC) là *K* với

$$K := \left\{ \begin{array}{c} x \in C : g(x) \leq 0,\ \ h(x) = 0, \\ G(x) \geq 0,\ \ H(x) \geq 0, \\ < G(x),\ H(x) >= 0 \end{array} \right\}.$$

Ở đây *C* là tập con khác rỗng trong $¡^{\ q}$, các hàm ràng buộc được mô tả ở dạng

$$g = (g_1, ..., g_m) : ¡^{\ q} \to ¡^{\ m},$$
$$h = (h_1, ..., h_n) : ¡^{\ q} \to ¡^{\ n},$$
$$G = (G_1, ..., G_p) : ¡^{\ q} \to ¡^{\ p},$$
$$H = (H_1, ..., H_p) : ¡^{\ q} \to ¡^{\ p}.$$

Chú ý các thành phần bên trong mỗi hàm số là một hàm vô hướng trên $¡^{\ q}$. Cho trước một vectơ chấp nhận được $\bar{x} \in K$, ta kí hiệu các tập chỉ số:

$$I_g = I_g(\bar{x}) = \left\{ i = \overline{1...m} : g_i(\bar{x}) = 0 \right\};$$
$$A = A(\bar{x}) = \left\{ i = \overline{1...p} :\ G_i(\bar{x}) = 0,\ H_i(\bar{x}) > 0 \right\};$$
$$B = B(\bar{x}) = \left\{ i = \overline{1...p} :\ G_i(\bar{x}) = 0,\ H_i(\bar{x}) = 0 \right\};$$
$$C = C(\bar{x}) = \left\{ i = \overline{1..p} :\ G_i(\bar{x}) > 0,\ H_i(\bar{x}) = 0 \right\}.$$

Bài toán đối ngẫu dạng Wolfe cho bài toán gốc (LOPEC), kí hiệu (DWLOPEC) và xác định như sau (xem [1, 4]) :

$$(DWLOPEC) : \max_{u,\ \lambda} \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{i \in I_g} \lambda_i^g g_i(u) + \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\lambda_j^h - \mu_j^h \right) h_j(u) \\ + f(u) - \sum\limits_{i=1}^{p} \left(\lambda_i^G G_i(u) + \lambda_i^H H_i(u) \right) \end{array} \right]$$

sao cho

$$f(v)+\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(v)+\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_j^h-\mu_j^h\right)h_j(v)$$
$$-\left[\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i^G G_i(v)+\lambda_i^H H_i(v)\right)\right]$$
$$\geq 0 \quad \forall v\in C-u;$$

$\lambda_i^g \geq 0\ \forall i\in I_g;\ \lambda_j^h,\ \mu_j^h\geq 0\ \forall j=1,2,...,n;$

$\lambda_i^G,\ \lambda_i^H,\ \mu_i^G,\ \mu_i^H\geq 0\ \ \forall i=1,2,...,p;$

$\lambda_C^G=\lambda_A^H=\mu_C^G=\mu_A^H=0,$

$\forall i\in B,\ \mu_i^G=\mu_i^H=0,$

$u\in C,\ \lambda_C^G=\left(\lambda_c^G\right)_{c\in C},\ \lambda_A^H=\left(\lambda_a^H\right)_{a\in A},$

$\mu_C^G=\left(\mu_c^G\right)_{c\in C},\ \mu_A^H=\left(\mu_a^H\right)_{a\in A},$

$\mu=\left(\mu^h,\ \mu^G,\ \mu^H\right)\in ¡^{n+2p},$

$\lambda=\left(\lambda^g,\ \lambda^h,\ \lambda^G,\ \lambda^H\right)\in ¡^{m+n+2p}.$

Mô hình đối ngẫu dạng Wolfe (DWLOPEC) trên được mô tả bằng một ví dụ số sau:

Ví dụ 1. Cho $q=2,\ C=[-1,1]\times[-1,1],$ $m=n=p=1.$ Xét bài toán tối ưu tuyến tính với ràng buộc cân bằng (LOPEC) trên không gian $¡^2$ và được mô tả như sau:

$$(LOPEC):\min_{(x_1,x_2)\in C} f(x)=5x_1-3x_2$$
$$g(x)=x_1-x_2\leq 0,$$
$$h(x)=x_1+x_2=0,$$
$$G(x)=x_2\geq 0,$$
$$H(x)=x_1\geq 0,$$
$$<G(x),\ H(x)>=x_1x_2=0.$$

Khi đó tập chấp nhận được $K=\{(0,0)\}.$ Chọn vectơ chấp nhận được $\bar{x}=(0,0)$ và ta có $I_g=\{1\},\ A=C=\phi,\ B=\{1\}.$ Khi đó mô hình đối ngẫu dạng Wolfe của bài toán gốc (LOPEC) là bài toán (DWLOPEC) có dạng:

$$\max_{\substack{u_1,u_2,\\ \lambda_1^g,\lambda_1^h,\lambda_1^G,\lambda_1^H}}\begin{bmatrix}5u_1-3u_2+\lambda_1^g(u_1-u_2)\\ +\left(\lambda_1^h-\mu_1^h\right)(u_1+u_2)\\ -\lambda_1^G u_2-\lambda_1^H u_1\end{bmatrix}$$

sao cho

$$5v_1-3v_2+\lambda_1^g(v_1-v_2)$$
$$+\left(\lambda_1^h-\mu_1^h\right)(v_1+v_2)-\lambda_1^G v_2$$
$$-\lambda_1^H v_1\geq 0\ \forall(v_1,v_2)\in C-(u_1,u_2);$$
$$\lambda_1^g\geq 0,\ \lambda_1^h\geq 0,$$
$$\mu_1^h\geq 0,\ \lambda_1^G\geq 0,\ \lambda_1^H\geq 0,$$
$$-1\leq u_i\leq 1,\ i=1,\ 2.$$

Kí hiệu các tập chỉ số

$$A_\mu^+=\left\{i\in A:\ \mu_i^G>0\right\};$$
$$C_\mu^+=\left\{i\in C:\ \mu_i^H>0\right\};$$
$$B_\mu^G=\left\{i\in B:\mu_i^H=0,\ \ \mu_i^G>0\right\};$$
$$B_\mu^H=\left\{i\in B:\mu_i^G=0,\ \ \mu_i^H>0\right\}.$$

Một định lí đối ngẫu yếu cho bài toán gốc (LOPEC) và bài toán đối ngẫu dạng Wolfe (DWLOPEC) sẽ được phát biểu:

Định lí 3.1 (*Đối ngẫu yếu***).** Cho $\bar{x}$ là chấp nhận được cho bài toán gốc (LOPEC) và $(u,\ \lambda)$ là chấp nhận được cho bài toán đối ngẫu dạng Wolfe (DWLOPEC). Khi đó, nếu $B_\mu^G\cup B_\mu^H\cup A_\mu^+\cup C_\mu^+=\phi$ thì với mọi vectơ chấp nhận được x của bài toán gốc (LOPEC), ta có

$$f(x)\geq f(u)+\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(u)+\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_j^h-\mu_j^h\right)h_j(u)$$
$$-\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i^G G_i(u)+\lambda_i^H H_i(u)\right)$$

Chứng minh: Vì f là hàm tuyến tính nên
$$f(x-u)=f(x)-f(u). \tag{3.1}$$

Do $g,\ h,\ G,\ H$ là các hàm tuyến tính nên các thành phần bên trong là các hàm vô hướng tuyến tính. Do đó, ta có

$$g_i(x-u)=g_i(x)-g_i(u)\ \ \forall i\in I_g. \tag{3.2}$$

$$h_j(x-u)=h_j(x)-h_j(u)\quad \forall j=1,2,..,n. \tag{3.3}$$

$$(-h_j)(x-u)=(-h_j)(x)-(-h_j)(u)\quad \forall j=1,2,..,n. \tag{3.4}$$

$$(-G_i)(x-u)=(-G_i)(x)-(-G_i)(u) \quad \forall i\in A\cup B. \tag{3.5}$$

$$(-H_i)(x-u)=(-H_i)(x)-(-H_i)(u) \quad \forall i\in C\cup B. \tag{3.6}$$

Theo giả thiết $B_\mu^G\cup B_\mu^H\cup A_\mu^+\cup C_\mu^+=\phi$, ta nhân lần lượt từng phương trình (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) và (3.6) cho các vô hướng

$\lambda_i^g\ge 0\ \forall i\in I_g;\ \lambda_i^h>0\ \forall i=1,2,...,n;$

$\mu_i^h>0\ \forall i=1,2,...,n;\ \lambda_i^G>0\ \forall i\in A\cup B;$

$\lambda_i^H>0\ \forall i\in B\cup C$, và sau đó cộng dồn chúng lại với nhau, ta nhận được kết quả

$$\begin{aligned}
&f(x)-f(u)+\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(x)-\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(u)\\
&+\sum_{j=1...n}\lambda_j^h h_j(x)-\sum_{j=1...n}\lambda_j^h h_j(u)\\
&+\sum_{j=1...n}\mu_j^h(-h_j)(x)-\sum_{j=1...n}\mu_j^h(-h_j)(u)\\
&+\sum_{i=1}^p\lambda_i^G\left(-G_i\right)(x)-\sum_{i=1}^p\lambda_i^G\left(-G_i\right)(u)\\
&+\sum_{i=1}^p\lambda_i^H\left(-H_i\right)(x)-\sum_{i=1}^p\lambda_i^H\left(-H_i\right)(u)\\
&=f(u-x)+\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(x-u)\\
&+\sum_{i=1}^n\left(\lambda_i^h-\mu_i^h\right)h_i(x-u)\\
&+\sum_{i=1}^p\lambda_i^G\left(-G_i\right)(x-u)+\sum_{i=1}^p\lambda_i^H\left(-H_i\right)(x-u).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Theo giả thiết $(u,\ \lambda)$ là vectơ chấp nhận được cho bài toán đối ngẫu dạng Wolfe (DWLOPEC) và ngoài ra $x-u\in C-u$, ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned}
&f(u-x)+\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(x-u)\\
&+\sum_{i=1}^n\left(\lambda_i^h-\mu_i^h\right)h_i(x-u)\\
&+\sum_{i=1}^p\lambda_i^G\left(-G_i\right)(x-u)\\
&+\sum_{i=1}^p\lambda_i^H\left(-H_i\right)(x-u)\ge 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Từ các điều kiện (3.7)-(3.8) dẫn đến

$$\begin{aligned}
&f(x)-f(u)+\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(x)-\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(u)\\
&+\sum_{j=1...n}\lambda_j^h h_j(x)-\sum_{j=1...n}\lambda_j^h h_j(u)\\
&+\sum_{j=1...n}\mu_j^h(-h_j)(x)-\sum_{j=1...n}\mu_j^h(-h_j)(u)\\
&+\sum_{i=1}^p\lambda_i^G\left(-G_i\right)(x)-\sum_{i=1}^p\lambda_i^G\left(-G_i\right)(u)\\
&+\sum_{i=1}^p\lambda_i^H\left(-H_i\right)(x)-\sum_{i=1}^p\lambda_i^H\left(-H_i\right)(u)\ge 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Do x là chấp nhận được của bài toán (LOPEC) nên các bất đẳng thức sau xảy ra:

$$g_i(x)\le 0\ \ \forall i\in I_g(\bar{x}), \tag{3.10}$$

$$\pm h_j(x)=0\ \ \forall j=1,2,...,n, \tag{3.11}$$

$$G_i(x)\ge 0\ \ \forall i=1,2,...,p, \tag{3.12}$$

$$H_i(x)\ge 0\ \ \forall i=1,2,...,p. \tag{3.13}$$

Kết hợp các điều kiện (3.10), (3.11), (3.12) và (3.13) ta nhận được bất đẳng thức đúng sau:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(x)+\sum_{j=1...n}\lambda_j^h h_j(x)\\
&+\sum_{j=1...n}\mu_j^h(-h_j)(x)\\
&+\sum_{i=1}^p\lambda_i^G\left(-G_i\right)(x)\\
&+\sum_{i=1}^p\lambda_i^H\left(-H_i\right)(x)\ \le 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Kết hợp điều kiện có trong (3.9) và (3.14), sau khi nhân vế trái của (3.14) với (-1), bất đẳng thức đổi chiều, ta suy ra được kết quả như sau:

$$\begin{aligned}
&f(x)\ge f(u)+\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(u)\\
&+\sum_{j=1...n}\lambda_j^h h_j(u)+\sum_{j=1...n}\mu_j^h(-h_j)(u)\\
&+\sum_{i=1}^p\lambda_i^G\left(-G_i\right)(u)+\sum_{i=1}^p\lambda_i^H\left(-H_i\right)(u)\\
&-\left[\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(x)+\sum_{j=1...n}\lambda_j^h h_j(x)\right.\\
&\left.+\sum_{j=1...n}\mu_j^h(-h_j)(x)+\sum_{i=1}^p\lambda_i^G\left(-G_i\right)(x)\right.
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^H\left(-H_i\right)(x)\Big]$$

$$\geq f(u)+\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(u)$$

$$+\sum_{j=1\ldots n}\lambda_j^h h_j(u)+\sum_{j=1\ldots n}\mu_j^h(-h_j)(u)$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^G\left(-G_i\right)(u)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^H\left(-H_i\right)(u)$$

$$=f(u)+\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(u)+\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_j^h-\mu_j^h\right)h_j(u)$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i^G G_i(u)+\lambda_i^H H_i(u)\right).$$

Vậy, bất đẳng thức cuối cùng nhận được là

$$f(x)\geq f(u)+\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(u)+\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_j^h-\mu_j^h\right)h_j(u)$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i^G G_i(u)+\lambda_i^H H_i(u)\right).$$

Điều này kết thúc chứng minh.

Tiếp theo chúng tôi phát biểu một định lí đối ngẫu mạnh cho bài toán gốc (LOPEC) trong trường hợp bỏ ràng buộc đẳng thức $h(x)=0$.

Định lí 3.2 (*Đối ngẫu mạnh***).** Cho $\bar{x}\in K$ là nghiệm tối ưu địa phương cho bài toán gốc (LOPEC). Giả sử $h\equiv 0,$ và tồn tại $v\in C-\bar{x}$ sao cho $g_i(v)<0\ \forall i\in I_g,\ (-G_i)(v)<0\ \forall i\in A\cup B$ và $(-H_i)(v)<0\ \forall i\in B\cup C.$ Khi đó, nếu điều kiện $B_\mu^G\cup B_\mu^H\cup A_\mu^+\cup C_\mu^+=\phi$ thì tồn tại một vectơ $\bar{\lambda}=\left(\bar{\lambda}^g,\bar{\lambda}^G,\bar{\lambda}^H\right)\in ¡^{\,m+2p}$ sao cho $\left(\bar{x},\bar{\lambda}\right)$ là nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu dạng Wolfe (DWLOPEC) và giá trị hàm mục tiêu của chúng tương ứng bằng nhau.

Chứng minh: Do $\bar{x}\in K$ là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán gốc (LOPEC) nên hệ bất đẳng thức sau không xảy ra:

$$\begin{cases} f(v)<0 \\ g_i(v)<0\ \ \forall i\in I_g, \\ (-G_i)(v)<0\ \forall i\in A\cup B, \\ (-H_i)(v)<0\ \ \forall i\in B\cup C, \\ v\in C-\bar{x}. \end{cases}$$

Áp dụng Định lí 2.12 trong Giáo trình của Rockafeller [6], khi đó tồn tại các vectơ chấp nhận được $(\tau,\lambda,\mu)\in ¡^{\,1+m+4p}$, trong đó

$$\tau\in ¡_{+},$$
$$\lambda=\left(\lambda^g,\ \lambda^G,\lambda^H\right)\in ¡^{\,m+2p},$$
$$\mu=\left(\mu^G,\mu^H\right)\in ¡^{\,2p}\ ,$$

và chúng không đồng thời bằng 0, thỏa mãn bất đẳng thức sau đây :

$$\tau f(v)+\sum_{i\in I_g}\lambda_i^g g_i(v)$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^G\left(-G_i\right)(v) \qquad (3.15)$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^H\left(-H_i\right)(v)\geq 0\ \ \forall v\in C-\bar{x}.$$

Mặt khác, theo giả thiết ban đầu tồn tại vectơ $v\in C-\bar{x}$ thỏa mãn

$$g_i(v)<0\ \ \forall i\in I_g, \qquad (3.16)$$

$$(-G_i)(v)<0\ \forall i\in A\cup B, \qquad (3.17)$$

và $(-H_i)(v)<0\ \ \forall i\in B\cup C.$ (3.18)

Kết hợp các điều kiện (3.15), (3.16), (3.17) và (3.18) ta nhận được $\tau>0.$ Không mất tính tổng quát của bài toán ta chọn các giá trị vô hướng $\tau=1$ và $\bar{\lambda}=\lambda.$ Áp dụng Định lí 3.1, với mọi vectơ (u,λ) là nghiệm chấp nhận được của bài toán đối ngẫu dạng Wolfe (DWLOPEC), bất đẳng thức dưới đây đúng:

$$f(\bar{x}) \geq f(u) + \sum_{i\in I_g} \lambda_i^g g_i(u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^G \left(-G_i\right)(u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^H \left(-H_i\right)(u) \geq 0. \quad (3.19)$$

Mặt khác, không khó kiểm tra được kết quả:

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i\in I_g} \lambda_i^g g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^G \left(-G_i\right)(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^H \left(-H_i\right)(\bar{x}). \quad (3.20)$$

Kết hợp (3.19) và (3.20) ta thu được

$$f(\bar{x}) + \sum_{i\in I_g} \lambda_i^g g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^G \left(-G_i\right)(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^H \left(-H_i\right)(\bar{x}) \geq f(u) + \sum_{i\in I_g} \lambda_i^g g_i(u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^G \left(-G_i\right)(u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^H \left(-H_i\right)(u).$$

Vậy $\left(\bar{x},\ \bar{\lambda}\right)$ là nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu dạng Wolfe (DWLOPEC), và giá trị hàm mục tiêu của chúng tương ứng bằng nhau.

Cuối cùng chúng tôi cung cấp một ví dụ để minh họa kết quả đạt được bên trên như sau:

Ví dụ 2. Cho $q = 2,\ C = [0,\ 3]^2,\ m = p = 1.$ Xét bài toán tối ưu tuyến tính với ràng buộc cân bằng (LOPEC) trên $\mathbb{R}^2$ sau:

$$\begin{aligned}(LOPEC):\ &\min_{(x_1,x_2)\in C} f(x) = x_1 + x_2\\ &g(x) = x_2 - x_1 \leq 0,\\ &G(x) = 3x_2 - x_1 \geq 0,\\ &H(x) = x_1 \geq 0,\\ &< G(x), H(x) >= \left(3x_2 - x_1\right)x_1 = 0.\end{aligned}$$

Tập chấp nhận được cho bài toán (LOPEC) là $K = \left\{(3a, a) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq 1\right\}$. Quan sát hàm mục tiêu $f(x) = 3x_1 + x_2$ ta dễ dàng thấy rằng nghiệm tối ưu của bài toán gốc (LOPEC) là $\bar{x} = (0,0)$. Kiểm tra khái niệm các tập chỉ số ta nhận được $I_g = \{1\},\ A = C = \phi,\ B = \{1\}.$ Vì $\bar{x} = (0,0)$ nên ta chọn vectơ $v = \left(2,\ \frac{1}{2}\right) \in C$, lúc này các bất đẳng thức (3.16), (3.17) và (3.18) đúng. Do đó tất cả các giả thiết trong Định lí 3.2 được thỏa mãn. Lúc này một mô hình đối ngẫu dạng Wolfe cho bài toán gốc (LOPEC là bài toán đối ngẫu (DWLOPEC) có dạng:

$$(D\text{WLOPEC}):\ \max_{\substack{u_1,u_2,\\ \lambda_1^g,\lambda_1^G,\lambda_1^H}} \begin{bmatrix} u_1 + \lambda_1^g\left(u_2 - u_1\right)\\ +u_2 - \lambda_1^G\left(3u_2 - u_1\right)\\ -\lambda_1^H u_1 \end{bmatrix}$$

sao cho

$$\begin{aligned}&v_1 + v_2 + \lambda_1^g\left(v_2 - v_1\right)\\ &-\lambda_1^G\left(3v_2 - v_1\right) - \lambda_1^H v_1\\ &\geq 0\ \forall (v_1, v_2) \in C - (u_1, u_2);\\ &\lambda_1^g \geq 0,\ \lambda_1^G \geq 0,\ \lambda_1^H \geq 0,\\ &0 \leq u_i \leq 3,\ i = 1, 2.\end{aligned}$$

Giả sử không xảy ra $\begin{bmatrix} \mu_1^H = 0,\ \mu_1^G > 0\\ \mu_1^G = 0,\ \mu_1^H > 0 \end{bmatrix}$,

nghĩa là

$$B_\mu^G \cup B_\mu^H \cup A_\mu^+ \cup C_\mu^+ = \phi.$$

Khi đó, áp dụng Định lí 3.2, tồn tại vectơ $\bar{\lambda} = \left(\bar{\lambda}^g, \bar{\lambda}^G, \bar{\lambda}^H\right) \in \mathbb{R}^3$ sao cho $\left(\bar{x},\ \bar{\lambda}\right)$ là nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu dạng Wolfe (DWLOPEC) và giá trị hàm mục tiêu của chúng tương ứng bằng nhau. Thật vậy, chúng ta thử lại kết quả trực tiếp như sau. Ta có $\bar{x} = (0,0)$ là nghiệm tối ưu của bài toán gốc (LOPEC) và giá trị hàm mục tiêu $f(\bar{x}) = 0.$ Tiếp theo, bằng phương pháp giải trực tiếp bài toán đối ngẫu dạng Wolfe (DWLOPEC), chúng ta cũng tìm được một nghiệm tối ưu cho bài toán đối ngẫu dạng Wolfe là

$$\left(\bar{u},\ \bar{\lambda}\right) = (0,\ 0,\ 2,1,0)$$

và giá trị hàm mục tiêu

$$f(\bar{u}) + \sum_{i\in I_g} \bar{\lambda}_i^g g_i(\bar{u}) - \sum_{i=1}^{p} \left(\bar{\lambda}_i^G G_i(\bar{u}) + \bar{\lambda}_i^H H_i(\bar{u})\right) = 0.$$

Vậy định lí 3.2 được kiểm tra.

Nhận xét 3.1. Trong trường hợp $C = ¡^{q}_{+}$ (nón orthant không âm) và $H = 0$ hoặc $G = 0$ thì bài toán (LOPEC) trở thành bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát dạng "min" sau (xem [7, tr.14]):

$$(LOPEC): \min f(x)$$
$$g(x) \le 0,$$
$$G(x) \ge 0 \ (H(x) \ge 0),$$
$$h(x) = 0,$$
$$x \ge 0.$$

Do đó, kết quả thu được bên trên có thể áp dụng trực tiếp cho bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát dạng "min" và thậm chí là cả bài toán vận tải và bài toán bán hàng và nhiều bài toán thực tế khác với điều kiện cả hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc đều là các hàm tuyến tính.

4. Kết luận

Bài báo đã xây dựng một cách đầy đủ mô hình đối ngẫu dạng Wolfe cho bài toán tối ưu tuyến tính với ràng buộc cân bằng (LOPEC). Chứng minh hai định lí về tính đối ngẫu yếu và tính đối ngẫu mạnh cho bài toán gốc (LOPEC) và bài toán đối ngẫu dạng Wolfe (DWLOPEC). Kết quả đạt được trong bài báo là hoàn toàn mới và trong tương lai các kết quả này có thể được áp dụng để xây dựng thuật toán số giải các bài toán tối ưu tuyến tuyến với ràng buộc cân bằng (LOPEC) và bài toán đối ngẫu của nó dạng Wolfe (DWLOPEC).

Tài liệu tham khảo

[1] R. I. Bot, S. -M. Grad (2010). Wolfe duality and Mond-Weir duality via perturbations. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl*., 73(2), 374-384.

[2] S. Dempe, A. B. Zemkoho (2012). Bilevel road pricing: Theoretical analysis and optimality conditions. *Ann. Oper. Research*, 196, 223-240.

[3] Z. Q. Luo, J. S. Pang, D. Ralph (1996). *Mathematical problems with equilibrium constraints*. Cambridge University Press, Cambridge.

[4] P. Wolfe (1961). A duality theorem for nonlinear programming. *Q. J. Appl. Math*, 19, 239-244.

[5] J. J. Ye (2005). Necessary and sufficient optimality conditions for mathematical program with equilibrium constraints. *J. Math. Anal. Appl*., 307, 350-369.

[6] R. T. Rockafellar (1970). Convex Analysis. *Princeton Univ. Press*, Princeton.

[7] Phí Mạnh Ban (2015). *Quy hoạch tuyến tính*, NXB Đại học Sư phạm.

WOLFE TYPE DUALITY FOR LINEAR OPTIMIZATION PROBLEMS WITH EQUILIBRIUM CONSTRAINTS

Abstract: Duality has an important role in the study of mathematical programming problems , since the weak duality provides a lower bound to the objective function of the primal problem (or the original problem). In this article, we formulate and investigate a Wolfe type duality model for linear optimization problems with equilibrium constraints. Firstly, we propose the Wolfe type duality model and give an example to illustrate the given dual model. Secondly, we establish the weak duality and strong duality theorems for a pair of the primal problem (LOPEC) and the Wolfe type dual problem (DWLOPEC). Finally, we present an example to illustrate the strong duality result in the paper.

Key words: linear optimization problem with equilibrium constraints; wolfe type duality; strong duality theorem; weak duality theorem; linear mappings.