UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

Nhận bài:
19 – 10 – 2018
Chấp nhận đăng:
25 – 12 – 2018
http://jshe.ued.udn.vn/

LUẬT SỐ LỚN ĐỐI VỚI TỔNG NGẪU NHIÊN CÓ TRỌNG SỐ CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ĐỘC LẬP ĐÔI MỘT CÓ MÔ MEN CẤP r VÔ HẠN

Hồ Minh Châu[a], Lê Văn Dũng[a*], Lương Thị Mỹ Hạnh[a]

Tóm tắt: Xét $(X_n; n \geq 1)$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một có mô men cấp r vô hạn với $1 < r < 2$. Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập điều kiện đủ để thu được luật yếu số lớn đối với tổng ngẫu nhiên có trọng số dạng $S_n = \sum_{j=1}^{T_n} c_{nj}(X_j - E(X_j))$, trong đó $(c_{nj}; 1 \leq j \leq m_n, n \geq 1)$ là mảng các số thực, $(T_n, n \geq 1)$ là dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương.

Từ khóa: mô men vô hạn; luật yếu số lớn; biến ngẫu nhiên; tổng ngẫu nhiên; độc lập đôi một.

1. Giới thiệu

Cho $(X_n; n \geq 1)$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phân bố xác suất, có kì vọng 0 và mô men tuyệt đối $E(|X_1|^r) < \infty$ với $1 \leq r < 2$. Luật yếu số lớn Marcinkiewicz-Zygmund phát biểu rằng

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Đối với dãy biến ngẫu nhiên cùng phân bố xác suất có mô men tuyệt đối cấp r vô hạn với $0 < r < 2$, Z.S. Szewczak [4] cũng đã thiết lập luật yếu số Marcinkiewicz-Zygmund đối với dãy biến ngẫu nhiên mixing và dừng mạnh thỏa mãn điều kiện $E(|X_1|^r I(|X_1| \leq x))$ là hàm biến phân chậm, trong đó $I(|X_1| \leq x)$ là hàm chỉ tiêu của tập $(|X_1| \leq x)$. Nakata [3] cũng thu được một số kết quả về luật yếu số lớn đối với dãy biến ngẫu nhiên có xác suất đuôi phân rã cấp r với $0 < r \leq 1$. Gần đây, Dung, Son và Yen [2] cũng đã thiết lập luật yếu số lớn đối với tổng có trọng số của dãy biến ngẫu nhiên độc lập có mô men cấp r vô hạn với $0 < r < 2$. Trong trường hợp $0 < r \leq 1$ ta luôn có bất đẳng thức

$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n|^r \leq |x_1|^r + |x_2|^r + \ldots + |x_n|^r$ với mọi số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Do đó, giả thiết độc lập trong các kết quả của [2] cho trường hợp $0 < r \leq 1$ là không cần thiết.

Xét $(X_n; n \geq 1)$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập đôi một có kì vọng 0 và mô men cấp r vô hạn với $1 < r < 2$, trong bài báo này chúng tôi thiết lập điều kiện đủ để thu được luật yếu số lớn đối với tổng ngẫu nhiên có trọng số:

$$S_n = \sum_{j=1}^{T_n} c_{nj}(X_j - E(X_j)),$$

trong đó $(c_{nj}; 1 \leq j \leq m_n, n \geq 1)$ là mảng các hằng số dương, $(T_n, n \geq 1)$ là dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương.

2. Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

Cho $(a_n; n \geq 1)$ và $(b_n; n \geq 1)$ là hai dãy các số thực dương. Trong bài báo này chúng tôi kí hiệu a_n © b_n thay cho $0 < \liminf a_n / b_n \leq \limsup a_n / b_n < \infty$; $a_n = o(b_n)$ có nghĩa là $\lim\limits_{n \to \infty} a_n / b_n = 0$ và $a_n \sim b_n$ được

[a]Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng
*** Tác giả liên hệ**
Lê Văn Dũng
Email: lvdung@ued.udn.vn

sử dụng cho $\lim\limits_{n\to\infty} a_n / b_n = 1$. Những kí hiệu này cũng được sử dụng cho hai hàm thực dương $f(x)$ và $g(x)$. Hàm chỉ tiêu của tập hợp A được kí hiệu là $I(A)$. Trong suốt bài báo này, hằng số dương c không nhất thiết giống nhau trong mỗi lần xuất hiện.

Bổ đề 1 [5]**.** *Cho* $X_1, X_2, ..., X_n$ *là dãy biến ngẫu nhiên đôi một trực giao. Khi đó tồn tại hằng số dương* c *không phụ thuộc* n *sao cho*

$$E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} X_i\right|^2\right) \le c\ln^2(4n)\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right).$$

Định nghĩa 1. Dãy biến ngẫu nhiên $(X_n, n\ge 1)$ được cho là *bị chặn ngẫu nhiên* bởi biến ngẫu nhiên X nếu tồn tại hằng số dương c sao cho với mọi $t \ge 0$,

$$\sup_n P(|X_n| \ge t) \le cP(|X| \ge t).$$

Bổ đề 2 [6]. *Cho* $(X_n, n\ge 1)$ *bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên* X. *Khi đó tồn tại hằng số dương* c *sao cho* $\forall\ p, q, t > 0$ *và* $\forall\ n \ge 1$,

$$a)\ E\left(|X_n|^q I(|X_n| \le t)\right) \le c\left[t^q P(|X| \ge t) + E|X|^q I(|X| \le t)\right];$$

$$b)\ E\left(|X_n|^p I(|X_n| > t)\right) \le cE\left(|X|^p I(|X| > t)\right).$$

Định nghĩa 2 [1]. Cho $a \ge 0$. Hàm số dương đo được $f(x)$ xác định trên miền $[a;+\infty)$ được gọi là hàm *biến phân chính quy cấp* r $(r \in ¡\,)$ ở $+\infty$ nếu với mọi $x > 0$,

$$\frac{f(tx)}{f(t)} \to x^r \text{ khi } t \to +\infty.$$

Trường hợp $r = 0$, hàm $f(x)$ được gọi là hàm *biến phân chậm* ở $+\infty$.

Với $x > 0$, kí hiệu $\log(x) = \max\{1, \ln(x)\}$, $\log(\log(x))$, trong đó $\ln(x)$ là hàm logarit tự nhiên. Dễ dàng kiểm tra được x^r, $x^r \log x$, $x^r \log(\log(x))$, $x^r \dfrac{\log(x)}{\log(\log(x))}$,... là các hàm biến phân chính quy cấp r $(r \in ¡\,)$ ở $+\infty$. Nếu biến ngẫu nhiên X có mô men tuyệt đối cấp r $(r > 0)$ hữu hạn thì $H(x) = E(|X|^r I(|X| \le x))$ là hàm biến phân chậm ở $+\infty$. Bổ đề sau là một phần của Bổ đề 3 trong [2].

Bổ đề 3 [2]. *Cho* $1 < r < 2$ *và* X *là biến ngẫu nhiên thỏa mãn* $H(x) = E\left(|X|^r I(|X| \le x)\right)$ *là hàm biến phân chậm ở* $+\infty$. *Khi đó,*

a) $\dfrac{P(|X| > x)}{x^{-r}H(x)} \to 0$ *khi* $x \to +\infty$;

b) $\dfrac{E\left(|X| I(|X| > x)\right)}{x^{1-r}H(x)} \to 0$ *khi* $x \to +\infty$;

c) $\dfrac{E\left(X^2 I(|X| \le x)\right)}{x^{2-r}H(x)} \to 0$ *khi* $x \to +\infty$.

Bổ đề 4 [1]. *Cho* $1 < r < 2$ *và* $l(x)$ *là hàm biến phân chậm. Khi đó,*

a) $\dfrac{\int_x^{\infty} t^{-r} l(t)\,dt}{x^{1-r} l(x)} \to \dfrac{1}{1-r}$ *khi* $x \to +\infty$;

b) $\dfrac{\int_0^{x} t^{1-r} l(t)\,dt}{x^{2-r} l(x)} \to \dfrac{1}{2-r}$ *khi* $x \to +\infty$.

Bổ đề sau là kết quả mở rộng của Bổ đề 1 trong [2].

Bổ đề 5. *Cho biến ngẫu nhiên* X *thỏa* $P(|X| > x)$ © $x^{-r} l(x)$ *với* $l(x)$ *là hàm biến phân chậm ở* $+\infty$. *Khi đó,*

a) $E\left(|X| I(|X| > x)\right)$ © $x^{1-r} l(x)$;

b) $E\left(|X|^2 I(|X| \le x)\right)$ © $x^{2-r} l(x)$.

Chứng minh.

a) $E\left(|X| I(|X| > x)\right) = \int_x^{\infty} t\,dP(|X| \le t)$

$= -\int_x^{\infty} t\,dP(|X| > t)$

$$= xP\left(|X|>x\right)+\int_{X}^{\infty} P\left(|X|>t\right)dt$$

$$\copyright\ x^{1-r}l(x)+\int_{X}^{\infty} t^{-r}l(t)dt\ \copyright\ x^{1-r}l(x).$$

b) $E\left(|X|^2 I\left(|X|\le x\right)\right)=\int_{X}^{\infty} t^2 dP\left(|X|\le t\right)$

$$=-\int_{0}^{X} t^2 dP\left(|X|>t\right)$$

$$=x^2P\left(|X|>x\right)+2\int_{0}^{X} tP\left(|X|>t\right)dt$$

$$\copyright\ x^{2-r}l(x)+2\int_{0}^{X} t^{1-r}l(t)dt\ \copyright\ x^{2-r}l(x).$$

3. Kết quả

Định lí 1. *Cho* $1<r<2$ *và* $\left(X_n,n\ge 1\right)$ *là dãy biến ngẫu nhiên độc lập đôi một có mô men cấp* r *vô hạn. Giả sử* $\left(X_n,n\ge 1\right)$ *bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên* X *và* $H(x)=E\left(|X|^r I\left(|X|\le x\right)\right)$ *là hàm biến phân chậm ở* $+\infty$. *Giả sử* $\left(T_n,n\ge 1\right)$ *là dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên, dương độc lập với* $(X_n,n\ge 1)$, *thỏa mãn*

$$P\left(T_n>m_n\right)\to 0 \text{ khi } n\to\infty.$$

Cho $\left(c_{nk};1\le k\le m_n,n\ge 1\right)$ *là dãy số thực thỏa mãn:*

$$\sup_n\left(\ln^2(4n)\sum_{k=1}^{m_n}|c_{nk}|^r H\left(\frac{1}{|c_{nk}|}\right)\right)<\infty \text{ và}$$

$$\max_{1\le k\le m_n}|c_{nk}|\to 0 \text{ khi } n\to\infty.$$

Khi đó,

$$\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X_k-E\left(X_k\right)\right)\xrightarrow{P}0 \text{ khi } n\to\infty.$$

Chứng minh. Với $n\ge 1, 1\le k\le m_n$,

Đặt: $X'_{nk}=X_kI\left(|c_{nk}X_k|\le 1\right)$,

$$X''_{nk}=X_kI\left(|c_{nk}X_k|>1\right),\ S'_n=\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X'_{nk}-E\left(X'_{nk}\right)\right),$$

$$S''_n=\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X''_{nk}-E\left(X''_{nk}\right)\right).$$

Ta có $S_n=S'_n+S''_n$.

Để chứng minh $S_n\xrightarrow{P}0$ ta chứng minh: $S'_n\xrightarrow{P}0$ và $S''_n\xrightarrow{P}0$.

Trước hết ta chứng minh $S'_n\xrightarrow{P}0$.

Do $(X_n,n\ge 1)$ độc lập đôi một nên $(X'_{nk}-E\left(X'_{nk}\right),1\le k\le m_n)$ là dãy biến ngẫu nhiên đôi một trực giao. Do đó, với $\varepsilon>0$ bé tùy ý,

$$P\left(\left|S'_n\right|>\varepsilon\right)=P\left(\left|\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X'_{nk}-E\left(X'_{nk}\right)\right)\right|>\varepsilon\right)$$

$$=P\left(\left(\left|\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X'_{nk}-E\left(X'_{nk}\right)\right)\right|>\varepsilon\right)\cap\left(T_n\le m_n\right)\right)$$

$$+P\left(\left(\left|\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X'_{nk}-E\left(X'_{nk}\right)\right)\right|>\varepsilon\right)\cap\left(T_n>m_n\right)\right)$$

$$\le P\left(\max_{1\le k\le m_n}\left|\sum_{k=1}^{k}c_{nj}\left(X'_{nj}-E\left(X'_{nj}\right)\right)\right|>\varepsilon\right)$$

$$+P\left(T_n>m_n\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Markov và Bổ đề 1 ta được

$$P\left(\left|S'_n\right|>\varepsilon\right)$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon^2}E\left(\max_{1\le k\le m_n}\left|\sum_{k=1}^{m_n}c_{nk}\left(X'_{nk}-E\left(X'_{nk}\right)\right)\right|^2\right)$$

$$+P\left(T_n>m_n\right)$$

$$\le\frac{c}{\varepsilon^2}\ln^2(4n)\sum_{k=1}^{m_n}E\left(c_{nk}\left(X'_{nk}-E\left(X'_{nk}\right)\right)\right)^2$$

$$+P\left(T_n>m_n\right)$$

$$\le\frac{c}{\varepsilon^2}\ln^2(4n)\sum_{k=1}^{m_n}c_{nk}^2E\left(X'^{\,2}_{nk}\right)+P\left(T_n>m_n\right)$$

$$=\frac{c}{\varepsilon^2}\ln^2(4n)\sum_{\substack{k=1\\ c_{nk}\ne 0}}^{m_n}c_{nk}^2E\left(X_{nk}^2I\left(|X_{nk}|\le\frac{1}{|c_{nk}|}\right)\right)$$

$$+P\left(T_n>m_n\right)$$

$$\le \frac{c}{\varepsilon^2}\ln^2(4n)\sum_{\substack{k=1\\c_{nk}\neq 0}}^{m_n} P\left(|X|\ge \frac{1}{|c_{nk}|}\right)$$

$$+\frac{c}{\varepsilon^2}\ln^2(4n)\sum_{\substack{k=1\\c_{nk}\neq 0}}^{m_n} E\left(X^2 I\left(|X|\le \frac{1}{|c_{nk}|}\right)\right)$$

$$+P(T_n > m_n).$$

Với $\delta>0$ bé tùy ý, áp dụng Bổ đề 3 với n đủ lớn ta được:

$$P\left(|X|>\frac{1}{|c_{nk}|}\right)\le \delta\left(\frac{1}{|c_{nk}|^r}H\left(\frac{1}{|c_{nk}|}\right)\right)$$

$$E\left(|X|^2 I\left(|X|\le \frac{1}{|c_{nk}|}\right)\right)\le \delta\left(\frac{1}{|c_{nk}|^{2-r}}H\left(\frac{1}{|c_{nk}|}\right)\right)$$

Thay vào biểu thức trên, ta được:

$$P\left(|S_n^{'}|>\varepsilon\right)\le \delta\frac{c}{\varepsilon^2}\ln^2(4n)\sum_{\substack{k=1\\c_{nk}\neq 0}}^{m_n}|c_{nk}|^r H\left(\frac{1}{|c_{nk}|}\right)$$

$$+P(T_n > m_n).$$

Cho $n\to\infty$ sau đó cho $\delta\to 0$ ta được $S_n^{'}\xrightarrow{P}0$ khi $n\to\infty$.

- Tiếp theo ta chứng minh $S_n^{''}\xrightarrow{P}0.$

Với $\varepsilon>0$ bé tùy ý,

$$P\left(|S_n^{''}|>\varepsilon\right)=P\left(\left|\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X_{nk}^{''}-E\left(X_{nk}^{''}\right)\right)\right|>\varepsilon\right)$$

$$=P\left(\left(\left|\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X_{nk}^{''}-E\left(X_{nk}^{''}\right)\right)\right|>\varepsilon\right)\cap(T_n\le m_n)\right)$$

$$+P\left(\left(\left|\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X_{nk}^{''}-E\left(X_{nk}^{''}\right)\right)\right|>\varepsilon\right)\cap(T_n> m_n)\right)$$

$$\le P\left(\max_{1\le k\le m_n}\left|\sum_{k=1}^{m_n}c_{nk}\left(X_{nk}^{''}-E\left(X_{nk}^{''}\right)\right)\right|>\varepsilon\right)$$

$$+P(T_n>m_n).$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Markov và Bổ đề 3 ta được

$$P\left(|S_n^{''}|>\varepsilon\right)\le\frac{1}{\varepsilon}E\left(\max_{1\le k\le m_n}\left|\sum_{k=1}^{m_n}c_{nk}\left(X_{nk}^{''}-E\left(X_{nk}^{''}\right)\right)\right|\right)$$

$$+P(T_n>m_n)$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m_n}|c_{nk}|E\left(\left|X_{nk}^{''}\right|\right)+P(T_n>m_n)$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{k=1\\c_{nk}\neq 0}}^{m_n}|c_{nk}|E\left(\left|X_{nk}I\left(|X_{nk}|>\frac{1}{|c_{nk}|}\right)\right|\right)+P(T_n>m_n)$$

$$=o\left(\sum_{k=1}^{m_n}|c_{nk}|^r H\left(\frac{1}{|c_{nk}|}\right)\right)+P(T_n>m_n)\to 0.$$

Do đó $S_n^{''}\xrightarrow{P}0$ khi $n\to\infty$.

Vì vậy,

$$\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X_k-E(X_k)\right)\xrightarrow{P}0 \text{ khi } n\to\infty.$$

Định lí 2. *Cho $1<r<2$ và $(X_n, n\ge 1)$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập đôi một có mô men cấp r vô hạn. Giả sử $(X_n, n\ge 1)$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X sao cho $P(|X|>x)$© $x^{-r}l(x)$. Giả sử $(T_n, n\ge 1)$ là biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với $(X_n, n\ge 1)$, thỏa mãn*

$$P(T_n>m_n)\to 0 \textit{ khi } n\to\infty.$$

Cho $(c_{nk}; 1\le k\le m_n, n\ge 1)$ là một dãy số thực thỏa mãn

$$\ln^2(4n)\sum_{k=1}^{m_n}|c_{nk}|^r l\left(\frac{1}{|c_{nk}|}\right)\to 0.$$

Khi đó

$$\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X_k-E(X_k)\right)\xrightarrow{P}0 \textit{ khi } n\to\infty.$$

Chứng minh. Với $n\ge 1, 1\le k\le m_n$

Đặt $X_{nk}^{'}=X_k I\left(|c_{nk}X_k|\le 1\right),$

$$X_{nk}^{''}=X_k I\left(|c_{nk}X_k|>1\right),$$

$$S_n^{'}=\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X_{nk}^{'}-E\left(X_{nk}^{'}\right)\right),$$

$$S_n^{''}=\sum_{k=1}^{T_n}c_{nk}\left(X_{nk}^{''}-E\left(X_{nk}^{''}\right)\right).$$

Để chứng minh $S_n \xrightarrow{P} 0$, ta chứng minh: $S_n^{'} \xrightarrow{P} 0$ và $S_n^{"} \xrightarrow{P} 0.$

- Trước hết ta chứng minh $S_n^{'} \xrightarrow{P} 0.$

Với $\varepsilon > 0$ bé tùy ý,

$$P\left(\left|S_n^{'}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\sum_{k=1}^{T_n} c_{nk}\left(X_{nk}^{'} - E\left(X_{nk}^{'}\right)\right)\right| > \varepsilon\right)$$

$$= P\left(\left(\left|\sum_{k=1}^{T_n} c_{nk}\left(X_{nk}^{'} - E\left(X_{nk}^{'}\right)\right)\right| > \varepsilon\right) \cap \left(T_n \le m_n\right)\right)$$

$$+ P\left(\left(\left|\sum_{k=1}^{T_n} c_{nk}\left(X_{nk}^{'} - E\left(X_{nk}^{'}\right)\right)\right| > \varepsilon\right) \cap \left(T_n > m_n\right)\right)$$

$$\le P\left(\max_{1 \le k \le m_n}\left|\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}\left(X_{nk}^{'} - E\left(X_{nk}^{'}\right)\right)\right| > \varepsilon\right)$$

$$+ P\left(T_n > m_n\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Markov và Bổ đề 1 ta được

$$P\left(\left|S_n^{'}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(\max_{1 \le k \le m_n}\left|\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}\left(X_{nk}^{'} - E\left(X_{nk}^{'}\right)\right)\right|^2\right)$$

$$+ P\left(T_n > m_n\right)$$

$$\le \frac{c}{\varepsilon^2} \ln^2(4n) \sum_{k=1}^{m_n} E\left(c_{nk}\left(X_{nk}^{'} - E\left(X_{nk}^{'}\right)\right)\right)^2$$

$$+ P\left(T_n > m_n\right)$$

$$\le \frac{c}{\varepsilon^2} \ln^2(4n) \sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}^2\, 2E\left(X_{nk}^{'\,2}\right) + P\left(T_n > m_n\right).$$

$$= \frac{c}{\varepsilon^2} \ln^2(4n) \sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}^2 E\left(X_{nk}^2 I\left(\left|c_{nk} X_{nk}\right| \le 1\right)\right)$$

$$+ P\left(T_n > m_n\right)$$

$$= \frac{c}{\varepsilon^2} \ln^2(4n) \sum_{\substack{k=1 \\ c_{nk} \ne 0}}^{m_n} c_{nk}^2 E\left(X_{nk}^2 I\left(\left|X_{nk}\right| \le \frac{1}{\left|c_{nk}\right|}\right)\right)$$

$$+ P\left(T_n > m_n\right)$$

$$\le \frac{c}{\varepsilon^2} \ln^2(4n) \sum_{\substack{k=1 \\ c_{nk} \ne 0}}^{m_n} P\left(\left|X\right| \ge \frac{1}{\left|c_{nk}\right|}\right)$$

$$+ \frac{c}{\varepsilon^2} \ln^2(4n) \sum_{\substack{k=1 \\ c_{nk} \ne 0}}^{m_n} c_{nk}^2 E\left(X^2 I\left(\left|X\right| \le \frac{1}{\left|c_{nk}\right|}\right)\right)$$

$$+ P\left(T_n > m_n\right)$$

$$\copyright\ \frac{c}{\varepsilon^2} \ln^2(4n) \sum_{\substack{k=1 \\ c_{nk} \ne 0}}^{m_n} \left|c_{nk}\right|^r l\left(\frac{1}{\left|c_{nk}\right|}\right) + P\left(T_n > m_n\right)$$

(theo Bổ đề 5)

$\to 0$ khi $n \to \infty.$

Vậy: $S_n^{'} \xrightarrow{P} 0$ khi $n \to \infty.$

- Tiếp theo ta chứng minh $S_n^{"} \xrightarrow{P} 0.$

Với $\varepsilon > 0$ bé tùy ý,

$$P\left(\left|S_n^{"}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\sum_{k=1}^{T_n} c_{nk}\left(X_{nk}^{"} - E\left(X_{nk}^{"}\right)\right)\right| > \varepsilon\right)$$

$$= P\left(\left(\left|\sum_{k=1}^{T_n} c_{nk}\left(X_{nk}^{"} - E\left(X_{nk}^{"}\right)\right)\right| > \varepsilon\right) \cap \left(T_n \le m_n\right)\right)$$

$$+ P\left(\left(\left|\sum_{k=1}^{T_n} c_{nk}\left(X_{nk}^{"} - E\left(X_{nk}^{"}\right)\right)\right| > \varepsilon\right) \cap \left(T_n > m_n\right)\right)$$

$$\le P\left(\max_{1 \le k \le m_n}\left|\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}\left(X_{nk}^{"} - E\left(X_{nk}^{"}\right)\right)\right| > \varepsilon\right)$$

$$+ P\left(T_n > m_n\right)$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} E\left(\max_{1 \le k \le m_n}\left|\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}\left(X_{nk}^{"} - E\left(X_{nk}^{"}\right)\right)\right|\right) + P\left(T_n > m_n\right)$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m_n} \left|c_{nk}\right| E\left|\left(X_{nk}^{"} - E\left(X_{nk}^{"}\right)\right)\right| + P\left(T_n > m_n\right)$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m_n} \left|c_{nk}\right| E\left(\left|X_{nk}^{"}\right|\right) + P\left(T_n > m_n\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m_n} \left|c_{nk}\right| E\left(\left|X_{nk}\right| I\left(\left|c_{nk} X_{nk}\right| > 1\right)\right) + P\left(T_n > m_n\right)$$

$$\le \frac{c}{\varepsilon} \sum_{\substack{k=1 \\ c_{nk} \ne 0}}^{m_n} \left|c_{nk}\right| E\left(\left|X\right| I\left(\left|X\right| > \frac{1}{\left|c_{nk}\right|}\right)\right) + P\left(T_n > m_n\right)$$

© $\dfrac{c}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m_n}\left|c_{nk}\right|^r l\left(\dfrac{1}{\left|c_{nk}\right|}\right)+P\left(T_n>m_n\right)\to 0.$

Vậy $S_n'' \xrightarrow{P} 0$ khi $n\to\infty.$

Do đó

$$\sum_{k=1}^{T_n} c_{nk}\left(X_k - E\left(X_k\right)\right) \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n\to\infty.$$

Ví dụ 1. Cho $1<r<2.$ Xét dãy biến ngẫu nhiên $(X_n, n\geq 1)$ liên tục, độc lập đôi một và có cùng phân bố xác suất với hàm mật độ xác suất chung

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{r}{x^{r+1}} & \text{khi } x\geq 1\\ 0 & \text{khi } x<1\end{cases}$$

Ta có $E(|X_1|^r I(|X_1|\leq x))=0$ nếu $x<1$ và $E(|X_1|^r I(|X_1|\leq x))=\ln x$ nếu $x\geq 1,$ do đó $H(x)=E(|X_1|^r I(|X_1|\leq x))$ là hàm biến phân chậm. Xét $(T_n, n\geq 1)$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập với $(X_n, n\geq 1),$ có cùng phân bố Poisson với tham số $\lambda>0,$ tức là

$$P(T_n=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k\in \text{¥}$$

Khi đó $P(T_n>k)\to 0$ khi $k\to\infty.$ Xét dãy hằng số $\left(c_{nk};1\leq k\leq n, n\geq 1\right)$ với $c_{nk}=\dfrac{1}{\ln(n)k}$ với mọi $1\leq k\leq n.$

Ta có

$$\sup_n\left(\ln^2(4n)\sum_{k=1}^{n}\left|c_{nk}\right|^r H\left(\frac{1}{\left|c_{nk}\right|}\right)\right)$$
$$\leq c\sup_n\left(\frac{\ln^3(4n)}{n^r}\right)<\infty$$

và $\max\limits_{1\leq k\leq n}\left|c_{nk}\right|\leq \dfrac{1}{\ln(n)}\to 0$ khi $n\to\infty.$

Vì vậy, áp dụng Định lí 1 ta được

$$\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^{T_n}\frac{1}{k}\left(X_k-\frac{r}{r-1}\right)\xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n\to\infty.$$

Ví dụ 2. Cho $1<r<2.$ Xét dãy biến ngẫu nhiên $(X_n, n\geq 1)$ liên tục, độc lập đôi một và có cùng phân bố xác suất với hàm mật độ xác suất chung

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c\ln x}{x^{r+1}} & \text{khi } x\geq 1\\ 0 & \text{khi } x<1\end{cases}$$

Ta có $P(X>x)$ © $\mathbf{x}^{-r}\ln x.$ Xét $(T_n, n\geq 1)$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập với $(X_n, n\geq 1),$ có cùng phân bố Poisson với tham số $\lambda>0.$ Khi đó $P(T_n>k)\to 0$ khi $k\to\infty.$ Xét dãy hằng số $\left(c_{nk};1\leq k\leq n, n\geq 1\right)$ với $c_{nk}=\dfrac{1}{\ln(n)k}$ với mọi $1\leq k\leq n.$ Ta có

$$\ln^2(4n)\sum_{k=1}^{n}\left|c_{nk}\right|^r l\left(\frac{1}{\left|c_{nk}\right|}\right)\leq c\frac{\ln^3(4n)}{n^{r-1}}\to 0 \text{ khi } n\to\infty.$$

Vì vậy, áp dụng Định lí 2 ta được

$$\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^{T_n}\frac{1}{k}\left(X_k-E(X_1)\right)\xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n\to\infty.$$

4. Kết luận

Bài báo đã thu được hai kết quả về hội tụ theo xác suất của tổng ngẫu nhiên có trọng số đối với dãy các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một có mô men tuyệt đối cấp r vô hạn với $1<r<2$. Kết quả trên là mở rộng một phần nội dung Định lí 5 và Định lí 11 trong bài báo [2]. Đối với trường hợp $0<r\leq 1$ các biến ngẫu nhiên không cần giả thuyết độc lập, nên trong bài báo này chúng tôi không xét. Bài báo cũng đã đưa ra hai ví dụ minh họa cho kết quả thu được.

Tài liệu tham khảo

[1] Bingham N., Goldie C., và Teugels J. (1989). *Regular Variation*. Cambridge University Press.

[2] Dung L. V., Son T. C., Yen N. T. H. (2018). Weak Laws of Large Numbers for sequences of random variables with infinite rth moments. *Acta Mathematica Hungarica*, 156, 2, 408-423.

[3] Nakata T. (2016). Weak laws of large numbers for weighted independent random variables with infinite mean. *Statistics and Probability Letter*, 109, 124-129.

[4] Szewczak Z. S. (2010). Marcinkiewicz laws with infinite moments. *Acta Mathematica Hungarica*, 127, 64-84.

[5] Sung S. H. (2014). Marcinkiewicz–Zygmund Type Strong Law of Large Numbers for Pairwise i.i.d. Random Variables. *Journal of Theoretical Probability*, 27, 1, 96-106.

[6] Su C. và Tong T. J. (2004). Almost sure convergence of the general Jamison weighted sum of B-valued random variables. *Acta Mathematica Sinica*, English Series, 20, 1, 181-192.

WEAK LAWS OF LARGE NUMBERS FOR RANDOM WEIGHTED SUM OF PAIRWISE INDEPENDENT RANDOM VARIABLES WITH INFINITE r-th MOMENTS

Abstract: Let $(X_n; n \geq 1)$ be a sequence of pairwise independent random variables with infinite r-th moments. In this paper, we establish sufficient conditions to obtain weak laws of large numbers for random weighted sum $S_n = \sum_{j=1}^{T_n} c_{nj}(X_j - E(X_j))$, where $(c_{nj}; 1 \leq j \leq m_n, n \geq 1)$ is an array of real numbers, $(T_n, n \geq 1)$ is a sequence of positive integer-valued random variables.

Key words: infinite moments; weak laws of large numbers; random variables, random sums, pairwise independence.