UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

# ẢNH 1-PHỦ-DÃY CỦA KHÔNG GIAN CÓ g-HÀM sn-MẠNG

Lương Quốc Tuyển[a*], Nguyễn Thị Mỹ Hạnh[b]

Nhận bài:
17 – 04 – 2018
Chấp nhận đăng:
25 – 06 – 2018
http://jshe.ued.udn.vn/

**Tóm tắt:** Metric hóa không gian topo là một trong những bài toán trọng tâm của topo đại cương. Năm 2007, Pengfei Yan, Shou Lin đã đưa ra một số điều kiện khả metric của không gian topo có g-hàm cơ sở yếu và đặc trưng của không gian đối xứng, không gian g-khả metric, không gian g-trải được thông qua g-hàm cơ sở yếu (xem [3]). Gần đây Trần Văn Ân, Lương Quốc Tuyển đã giới thiệu khái niệm g-hàm sn-mạng. Nhờ đó, các tác giả đã đưa ra đặc trưng của không gian snf-đếm được, không gian sn-đối xứng, không gian sn-đối xứng Cauchy, không gian sn-trải được, không gian sn-khả metric thông qua g-hàm sn-mạng (xem [2]). Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một số bảo tồn của không gian với g-hàm sn-mạng với một số tính chất topo nào đó thông qua ánh xạ 1-phủ-dãy. Nhờ những kết quả này, chúng tôi thu được bảo tồn của một số không gian metric suy rộng.

**Từ khóa:** g-hàm sn-mạng; ánh xạ 1-phủ-dãy; không gian snf-đếm được; không gian sn-đối xứng; không gian sn-đối xứng Cauchy; không gian sn-trải được.

## 1. Giới thiệu

Năm 2007, Pengfei Yan, Shou Lin đã đưa ra một số điều kiện khả metric của không gian topo với g-hàm cơ sở yếu và đặc trưng của một số không gian metric suy rộng thông qua g-hàm cơ sở yếu (xem [3]). Bên cạnh đó, Iwao Yoshioka đã đưa ra bảo tồn của một số không gian metric suy rộng thông qua ánh xạ đóng (xem [4]). Gần đây, Trần Văn Ân, Lương Quốc Tuyển giới thiệu khái niệm g-hàm sn-mạng và đã thu được đặc trưng của một số không gian metric suy rộng thông qua g-hàm sn-mạng (xem [2]). Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu bảo tồn của một số không gian với g-hàm sn-mạng thông qua ánh xạ 1-phủ-dãy.

## 2.Cơ sở lí thuyết và phương pháp nghiên cứu

### 2.1. Cơ sở lí thuyết

***2.1.1. Định nghĩa ([1]).*** Giả sử $\mathcal{P}$ là họ nào đó gồm các tập con của không gian topo $X$, $x \in X$ và $P \in \mathcal{P}$. Khi đó,

(1) $P$ được gọi là *lân cận dãy của* $x$ nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $x$, tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\{x\} \cup \{x_n : n \geq m\} \subset P.$$

(2) $\mathcal{P}$ được gọi là *mạng tại* $x$ nếu $x \in P$ với mọi $P \in \mathcal{P}$ và với mọi lân cận mở $U$ của $x$, tồn tại $P \in \mathcal{P}$ sao cho $x \in P \subset U$.

***2.1.2. Định nghĩa ([1]).*** Giả sử rằng

$$\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$$

là họ nào đó gồm các tập con của không gian topo $X$ thỏa mãn các điều kiện sau.

(1) $\mathcal{P}_x$ là mạng tại $x$;

(2) Nếu $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_x$, thì tồn tại $P \in \mathcal{P}_x$ sao cho $P \subset P_1 \cap P_2$;

(3) Mỗi phần tử của $\mathcal{P}_x$ là một lân cận dãy của $x$.

Khi đó, $\mathcal{P}$ được gọi là *sn-mạng* của $X$, và mỗi $\mathcal{P}_x$ được gọi là *sn-mạng* tại $x$.

***2.1.3. Định nghĩa ([2]).*** Giả sử $X$ là một không gian topo. Khi đó, hàm

[a,b]*Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*
*** Tác giả liên hệ**
Lương Quốc Tuyển
Email: tuyendhdn@gmail.com

$$g:\mathbb{N}\times X\to\mathcal{P}(X)$$
$$(n,x)\mapsto g(n,x)$$

được gọi là *g-hàm sn-mạng* trên $X$ nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau.

(1) $x\in g(n,x)$ với mọi $x\in X$ và $n\in\mathbb{N}$.

(2) $g(n+1,x)\subset g(n,x)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

(3) $\{g(n,x):n\in\mathbb{N}\}$ là sn-mạng tại $x$.

***2.1.4. Nhận xét ([2]).*** Giả sử rằng $g$ là một *g*-hàm sn-mạng trên không gian topo $X$. Khi đó, ta đặt:

(E) Nếu $x_n\in g(n,x)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$, thì $x_n\to x$.

(F) Nếu $x\in g(n,x_n)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$, thì $x_n\to x$.

(wF) Nếu $x\in g(n,x_n)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$, thì tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ đến $x$.

(G) Nếu $x,\ x_n\in g(n,y_n)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$, thì $x_n\to x$.

(H) Nếu $x_n\to x$ và $x_n\in g(n,y_n)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$, thì $y_n\to x$.

***2.1.5. Định nghĩa ([1]).*** Giả sử $f:X\to Y$ là một ánh xạ từ không gian topo $X$ vào không gian topo $Y$. Ta nói rằng $f$ là ánh xạ *1-phủ-dãy* nếu $f$ liên tục và với mỗi $y\in Y$, tồn tại $x_y\in f^{-1}(y)$ sao cho với mọi dãy $\{y_n\}$ hội tụ đến $y$ trong $Y$, tồn tại dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $x_y$ trong $X$ sao cho $f(x_n)=y_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

***2.1.6. Nhận xét.*** Giả sử $f:X\to Y$ là ánh xạ 1-phủ-dãy từ không gian topo $X$ vào không gian topo $Y$, và

$$g:\mathbb{N}\times X\to\mathcal{P}(X)$$
$$(n,x)\mapsto g(n,x)$$

là một g-hàm sn-mạng trên $X$. Khi đó, với mỗi $y\in Y$, tồn tại $x_y\in f^{-1}(y)$ thỏa mãn Định nghĩa 2.1.5. Ta đặt

$$h:\mathbb{N}\times Y\to\mathcal{P}(Y)$$
$$(n,y)\mapsto h(n,y)=f\left[g(n,x_y)\right].$$

***2.1.7. Định nghĩa ([2]).*** Giả sử $X$ là một không gian topo. Khi đó,

(1) $X$ được gọi là không gian *snf-đếm được* nếu $X$ có sn-mạng $\mathcal{P}=\bigcup\{\mathcal{P}_x:x\in X\}$ sao cho mỗi $\mathcal{P}_x$ là đếm được.

(2) $X$ được gọi là không gian *sn-trải được* nếu $X$ có một g-hàm sn-mạng thỏa mãn tính chất (G).

***2.1.8. Định nghĩa ([1]).*** Giả sử rằng $X$ là một không gian topo. Khi đó, $d:X\times X\to\mathbb{R}$ được gọi là một *d-hàm* trên $X$ nếu với mọi $x,y\in X$, ta có

(1) $d(x,y)\geq 0$;

$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

(2) $d(x,y)=d(y,x)$.

***2.1.9. Định nghĩa ([1]).*** Giả sử $d$ là một d-hàm trên không gian topo $X$. Khi đó,

(1) Với mỗi $x\in X$ và $n\in\mathbb{N}$, ta đặt

$$S_n(x)=\{y\in X:d(x,y)<1/n\}.$$

(2) Dãy $\{x_n\}\subset X$ được gọi là *d-Cauchy* nếu với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại $k\in\mathbb{N}$ sao cho

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon \text{ với mọi } m,n\geq k.$$

(3) $X$ được gọi là không gian *sn-đối xứng* nếu $\{S_n(x):n\in\mathbb{N}\}$ là sn-mạng tại $x$ với mọi $x\in X$.

(4) $X$ được gọi là không gian *sn-đối xứng Cauchy* nếu nó là không gian sn-đối xứng và mỗi dãy hội tụ là d-Cauchy.

### 2.2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi dùng phương pháp nghiên cứu lí thuyết trong quá trình viết bài báo. Sử dụng khái niệm và một số kết quả của những tác giả đi trước, chúng tôi đưa ra một số bảo tồn của không gian với g-hàm sn-mạng thỏa mãn một số tính chất topo nào đó thông qua ánh xạ 1-phủ-dãy. Nhờ đó, chúng tôi đưa ra được bảo tồn của một số không gian metric suy rộng qua ánh xạ 1-phủ-dãy.

## 3. Kết quả và đánh giá

### 3.1. Kết quả

***3.1.1 Định lí.*** *Giả sử $f:X\to Y$ là ánh xạ 1-phủ-dãy từ không gian topo $X$ vào không gian topo $Y$,*

$$g : \mathbb{N} \times X \to \mathcal{P}(X)$$
$$(n, x) \mapsto g(n, x)$$

*là một g-hàm sn-mạng trên* $X$ *và*

$$h : \mathbb{N} \times Y \to \mathcal{P}(Y)$$
$$(n, y) \mapsto h(n, y) = f\left[g(n, x_y)\right].$$

*Khi đó, các khẳng định sau là đúng.*

(1) *Nếu* $g$ *là g-hàm sn-mạng trên* $X$, *thì* $h$ *là g-hàm sn-mạng trên* $Y$.

(2) *Nếu* $g$ *thỏa mãn thêm một trong các tính chất* $(\mathrm{E})$, $(\mathrm{F})$, $(\mathrm{wF})$, $(\mathrm{G})$, *thì* $h$ *cũng vậy.*

**Chứng minh.** (1) Giả sử $g$ là g-hàm sn-mạng trên $X$. Ta chứng minh $h$ là g-hàm sn-mạng trên $Y$. Thật vậy,

(1.1) $y \in h(n, y)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giả sử $n \in \mathbb{N}$, khi đó vì $x_y \in f^{-1}(y)$ nên

$$y = f(x_y) \in f\left[g(n, x_y)\right] = h(n, y).$$

(1.2) $h(n+1, y) \subset h(n, y)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giả sử $n \in \mathbb{N}$, khi đó vì $g$ là một g-hàm sn-mạng trên $X$ nên

$$g(n+1, x_y) \subset g(n, x_y) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Điều này suy ra rằng

$$h(n+1, y) = f\left[g(n+1, x_y)\right] \subset f\left[g(n, x_y)\right] = h(n, y).$$

(1.3) $\mathcal{P}_y = \{h(n, y) : n \in \mathbb{N}\}$ là một sn-mạng tại $y$ với mọi $y \in Y$.

Giả sử rằng $y \in Y$. Khi đó,

- $\mathcal{P}_y$ là mạng tại $y$.

Trước tiên, nhờ (1.1) ta suy ra rằng $y \in h(n, y)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Bây giờ, giả sử $U$ là lân cận mở của $y$ trong $Y$. Khi đó, vì $f$ là ánh xạ liên tục nên $f^{-1}(U)$ là lân cận mở của $x_y$ trong $X$. Mặt khác, bởi vì $g$ là g-hàm sn-mạng trên $X$ nên tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$x_y \in g(n, x_y) \subset f^{-1}(U).$$

Điều này suy ra

$$y \in h(n, y) = f\left[g(n, x_y)\right] \subset U.$$

Như vậy, tồn tại $P = h(n, y) \in \mathcal{P}_y$ sao cho $y \in P \subset U$.

- Giả sử rằng $P, Q \in \mathcal{P}_y$. Khi đó, tồn tại $m, n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$P = h(m, y), \; Q = h(n, y).$$

Bây giờ, nếu ta đặt

$$k = \max\{m, n\}, \; R = h(k, y),$$

thì ta thu được $R \in \mathcal{P}_y$, $R \subset P \cap Q$.

- $h(n, y)$ là một lân cận dãy của $y$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giả sử $n \in \mathbb{N}$ và $\{y_k\}$ là dãy hội tụ đến $y$ trong $Y$. Khi đó, vì $f$ là ánh xạ 1-phủ-dãy nên tồn tại dãy $\{x_k\}$ hội tụ đến $x_y$ trong $X$ sao cho $f(x_k) = y_k$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Mặt khác, vì $g(n, x_y)$ là lân cận dãy tại $x_y$ nên tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\{x_y\} \cup \{x_k : k \geq m\} \subset g(n, x_y).$$

Điều này suy ra rằng

$$\{y\} \cup \{y_k : k \geq m\} = f\left[\{x_y\} \cup \{x_k : k \geq m\}\right] \subset f\left[g(n, x_y)\right] = h(n, y).$$

Như vậy, $h(n, y)$ là một lân cận dãy của $y$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Từ chứng minh trên ta suy ra rằng $\mathcal{P}_y$ là một sn-mạng tại $y$ với mọi $y \in Y$.

Do đó, từ (1.1), (1.2) và (1.3) ta suy ra $h$ là một *g*-hàm *sn*-mạng trên $Y$.

(2) Giả sử rằng $g$ thỏa mãn thêm một trong các tính chất $(\mathrm{E})$, $(\mathrm{F})$, $(\mathrm{wF})$, $(\mathrm{G})$. Khi đó,

(2.1) Giả sử $g$ thỏa mãn tính chất $(\mathrm{E})$. Ta chứng minh $h$ thỏa mãn tính chất $(\mathrm{E})$.

Thật vậy, giả sử rằng $y_n \in h(n, y)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, vì

$$h(n, y) = f\left[g(n, x_y)\right] \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}$$

nên ta suy ra rằng với mỗi $n \in ¥$, tồn tại $x_n \in g(n, x_y)$ sao cho

$$f(x_n) = y_n \text{ với mọi } n \in ¥.$$

Mặt khác, vì $g$ thỏa mãn tính chất (E) nên dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $x_y$ trong $X$. Hơn nữa, vì $f$ là ánh xạ liên tục nên $\{f(x_n)\}$ hội tụ đến $f(x_y)$ trong $Y$. Do đó, dãy $\{y_n\}$ hội tụ đến $y$ trong $Y$. Như vậy, $h$ thỏa mãn tính chất (E).

(2.2) Giả sử $g$ thỏa mãn tính chất (F). Ta chứng minh $h$ thỏa mãn tính chất (F).

Thật vậy, giả sử rằng

$$y \in h(n, y_n) \text{ với mọi } n \in ¥.$$

Khi đó, với mỗi $n \in ¥$, tồn tại $x_{y_n}$, $x \in X$ sao cho với mọi $n \in ¥$, ta có

$$f(x_{y_n}) = y_n, \quad f(x) = y, \text{ và } x \in g(n, x_{y_n}).$$

Bởi vì $g$ thỏa mãn tính chất (F) nên dãy $\{x_{y_n}\}$ hội tụ đến $x$ trong $X$. Mặt khác, vì $f$ là ánh xạ liên tục nên ta suy ra $\{f(x_{y_n})\}$ là dãy hội tụ đến $f(x)$ trong $Y$. Do đó, dãy $\{y_n\}$ hội tụ đến $y$ trong $Y$. Như vậy, $h$ thỏa mãn tính chất (F).

(2.3) Giả sử $g$ thỏa mãn tính chất (wF). Ta chứng minh $h$ thỏa mãn tính chất (wF).

Thật vậy, giả sử $y \in h(n, y_n)$ với mọi $n \in ¥$. Khi đó, với mỗi $n \in ¥$, tồn tại $x_{y_n}$, $x \in X$ sao cho với mọi $n \in ¥$, ta có

$$f(x_{y_n}) = y_n, \quad f(x) = y \text{ và } x \in g(n, x_{y_n}).$$

Bởi vì $g$ thỏa mãn tính chất (wF) nên tồn tại dãy con $\{x_{y_{n_k}}\}$ của dãy $\{x_{y_n}\}$ hội tụ đến $x$ trong $X$. Mặt khác, vì $f$ là ánh xạ liên tục nên $\{f(x_{y_{n_k}})\}$ hội tụ đến $f(x)$ trong $Y$. Do đó, tồn tại dãy con $\{y_{n_k}\}$ của $\{y_n\}$ hội tụ đến $y$ trong $Y$. Điều này chứng tỏ rằng $h$ thỏa mãn tính chất (wF).

(2.4) Giả sử $g$ thỏa mãn tính chất (G). Ta chứng minh $h$ thỏa mãn tính chất (G).

Thật vậy, giả sử $z, z_n \in h(n, y_n)$ với mọi $n \in ¥$. Khi đó, bởi vì

$$z, z_n \in h(n, y_n) = f\left[g(n, x_{y_n})\right]$$

nên với mỗi $n \in ¥$, tồn tại $x, x_n \in X$ sao cho

$$x, x_n \in g(n, x_{y_n}), \quad f(x) = z, \quad f(x_n) = z_n.$$

Mặt khác, vì $g$ là g-hàm sn-mạng trên $X$ thỏa mãn tính chất (G) nên dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $x$ trong $X$. Hơn nữa, vì $f$ là ánh xạ liên tục nên dãy $\{z_n\}$ hội tụ đến $z$ trong $Y$. Như vậy, $h$ thỏa mãn tính chất (G).

***3.1.2. Bổ đề ([1]).*** Giả sử $X$ là một không gian topo. Khi đó,

(1) *$X$ là không gian snf-đếm được khi và chỉ khi nó có g-hàm sn-mạng thỏa mãn tính chất* (E).

(2) *$X$ là không gian sn-đối xứng khi và chỉ khi nó có g-hàm sn-mạng thỏa mãn tính chất* (F).

(3) *$X$ là không gian sn-trải được khi và chỉ khi nó là không gian sn-đối xứng Cauchy.*

Sử dụng Định lí 3.1.1 và Bổ đề 3.1.2 ta thu được hệ quả sau.

***3.1.3. Hệ quả.*** Giả sử rằng $f : X \to Y$ là ánh xạ 1-phủ-dãy từ không gian topo $X$ vào không gian topo $Y$. Khi đó,

(1) *Nếu $X$ là không gian snf-đếm được, thì $Y$ cũng vậy.*

(2) *Nếu $X$ là không gian sn-đối xứng, thì $Y$ cũng vậy.*

(3) *Nếu $X$ là không gian sn-đối xứng Cauchy, thì $Y$ cũng vậy.*

(4) *Nếu $X$ là không gian sn-trải được, thì $Y$ cũng vậy.*

### 3.2. Đánh giá

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất topo được bảo tồn qua ánh xạ 1-phủ-dãy. Nhờ đó, chúng tôi đã đưa ra một số kết quả mới được thể hiện ở Định lí 3.1.1 và Hệ quả 3.1.3.

## 4. Kết luận

Chúng tôi chứng minh không gian với g-hàm sn-mạng thỏa mãn một số tính chất topo được bảo tồn qua ánh xạ 1-phủ-dãy. Nhờ đó, chúng tôi chứng minh được rằng không gian sn-trải được, snf-đếm được, sn-đối xứng, sn-đối xứng Cauchy được bảo tồn qua ánh xạ 1-phủ-dãy.

### Tài liệu tham khảo


[1] An, T.V., and Tuyen, L.Q. (2018). Cauchy sn-symmetric spaces with a cs-network ($cs^{*}$- network) having property σ-(P). *Topology Proc*. 51, 61-75.

[2] An, T.V., and Tuyen, L.Q. (2018). Spaces with sn-network g-functions. *Topology Proc*.. Accepted.

[3] Yan, P., and Lin, S. (2007). CWC-mappings and metrization theorems. *Adv. Math*.. 36 (2), 153-158.

[4] Yoshioka, I. (2007). Closed images of spaces having g-functions. *Topology Appl.* 154, 1980-1992.


## 1-SEQUENCE-COVERING IMAGES OF SPACES HAVING sn-NETWORK g-FUNCTIONS


**Abstract**: Metrizability of topology space is one of the central problems in general topology. In 2007, Pengfei Yan, Shou Lin gave some condition about metrizability of topology space having weak base g-functions and characterization of symmetric spaces, g-metrizable spaces, g-developable spaces by weak base g-functions (see [3]). Recently, Tran Van An, Luong Quoc Tuyen has introduced the concept of sn-network g-functions. Then, the authors have given a characterization of snf-countable spaces, sn-symmetric spaces, Cauchy sn-symmetric spaces, sn-developable spaces, sn-metrizable spaces by sn-network g-functions (see [2]). In this paper, we will give some preservations of spaces having sn-network g-functions with some topological property by 1-sequence-covering. Using this results, we get preservations of some generalized metric spaces.



**Key words:** sn-network g-functions; 1-sequence-covering maps; snf-countable spaces; sn-symmetric spaces; Cauchy sn-symmetric spaces; sn-developable spaces.