UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

Nhận bài:
10 – 02 – 2018
Chấp nhận đăng:
28 – 06 – 2018
http://jshe.ued.udn.vn/

MỘT MỞ RỘNG CỦA LUẬT MẠNH SỐ LỚN LOẠI MARCINKIEWICZ - ZYDMUND

Tôn Thất Tú[a], Nguyễn Thị Hải Yến[b*]

Tóm tắt: Xét dãy các biến ngẫu nhiên $(X_n; n \geq 1)$ độc lập bị chặn ngẫu nhiên bởi một biến ngẫu nhiên X, chúng tôi để ý rằng các biến ngẫu nhiên xét ở đây không nhất thiết cùng phân bố xác suất. Trong bài báo này, bằng cách sử dụng khái niệm, các tính chất của hàm số biến thiên chính quy $b(x)$ cùng với định lí Karamata và các định lí khác nữa, chúng tôi thu được dãy $\frac{1}{b^{-1}(n)}\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k)) \to 0$ hội tụ hầu chắc chắn khi $n \to \infty$. Vì thế, nếu $(X_n; n \geq 1)$ độc lập cùng phân bố xác suất và lấy $b(x) = x^r$ với $1 < r < 2$, ta thu được luật mạnh số lớn loại Marcinkiewicz - Zydmund cho dãy các biến ngẫu nhiên này. Nói cách khác, chúng tôi mở rộng của luật mạnh số lớn loại Marcinkiewicz - Zydmund cho dãy các biến ngẫu nhiên độc lập bị chặn không nhất thiết cùng phân bố xác suất.

Từ khóa: hàm biến thiên chính quy; hàm biến thiên chậm; dãy biến ngẫu nhiên bị chặn; luật mạnh số lớn Marcinkiewicz - Zydmund; định lí Karamata.

1. Giới thiệu

Cho $(X_n; n \geq 1)$ là dãy các biến ngẫu nhiên và đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Giả sử $(a_n; n \geq 1)$ và $(b_n; n \geq 1)$ là các dãy số thực sao cho $0 < b_n \uparrow \infty$. Khi đó dãy $(X_n; n \geq 1)$ tuân theo luật mạnh số lớn với các hằng số trung tâm $(a_n; n \geq 1)$ và các hằng số định chuẩn $(b_n; n \geq 1)$, nếu

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \to 0 \text{ hầu chắc chắn khi } n \to \infty. \quad (1)$$

Có hai luật mạnh số lớn nổi tiếng đối với dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố xác suất. Đó là luật mạnh số lớn Kolmogorov và luật mạnh số lớn Marcinkiewicz - Zydmund. Chúng tương ứng với $r = 1$ và $1 < r < 2$ khẳng định rằng $E(|X_1|^r) < \infty$ và $E(X_1) = C$ nếu và chỉ nếu (1) đúng khi $a_n = Cn$ và $b_n = n^{1/r}$. Đối với dãy các biến ngẫu nhiên $(X_n; n \geq 1)$ độc lập (không nhất thiết cùng phân bố xác suất) thì luật mạnh số lớn Kolmogorov phát biểu rằng điều kiện đủ để $(X_n; n \geq 1)$ tuân theo luật mạnh số lớn là $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty$ và khi đó $a_n = E(S_n)$. Mục đích của bài báo là cải tiến điều kiện moment của luật mạnh số lớn loại Marcinkiewicz - Zydmund cho dãy các biến ngẫu nhiên $(X_n; n \geq 1)$ độc lập không nhất thiết cùng phân bố xác suất nhưng bị chặn ngẫu nhiên bởi một biến ngẫu nhiên X.

Trong suốt bài báo C là hằng số dương và nó không nhất thiết giống nhau trong mỗi lần xuất hiện. Kí hiệu $b^{-1}(x)$ là hàm ngược của hàm $b(x)$.

2. Cơ sở lí thuyết

Định nghĩa 2.1. (xem Định nghĩa 7.1 [1, tr.566]) Cho $a > 0$ là một số thực dương. Hàm số dương đo

a,b Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng
* **Tác giả liên hệ**
Nguyễn Thị Hải Yến
Email: nthyen_kt@ued.udn.vn

được $f(x)$ trên $[a;\infty)$ được gọi là biến thiên chính quy bậc $\rho \in (-\infty;\infty)$ tại vô cùng và được kí hiệu là $f \in RV(\rho)$ nếu $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(tx)}{f(t)} = x^{\rho}$ với mọi $x > 0$.

Nếu $\rho = 0$ thì hàm số $f(x)$ biến thiên chính quy bậc $\rho = 0$ được gọi là biến thiên chậm và được kí hiệu là $f \in SV$.

Các ví dụ điển hình về hàm số biến thiên chính quy bậc $\rho \in (-\infty;\infty)$ là:

$$x^{\rho},\ x^{\rho} log^{+} x,\ x^{\rho} log^{+} log^{+} x,\ x^{\rho} \frac{log^{+} x}{log^{+} log^{+} x}, \ldots$$

trong đó $log^{+} x$ được hiểu là $\max\{1, logx\}$.

Mỗi hàm số dương đo được có giới hạn hữu hạn khi $x \to \infty$ là hàm số biến thiên chậm.

Định lí 2.1. (Định lí Karamata) (xem Định lí 1.5.11 [2, tr.28]). Cho $f \in RV(\rho)$ và bị chặn địa phương trên $[x_0;\infty)$ với $x_0 \ge 0$. Khi đó:

(i) Với $\sigma \ge -(\rho+1)$,

$$x^{\sigma+1} f(x) \Big/ \int_{x_0}^{x} t^{\sigma} f(t)\,dt \to \sigma + \rho + 1$$

khi $x \to \infty$;

(ii)Với $\sigma < -(\rho+1)$,

$$x^{\sigma+1} f(x) \Big/ \int_{x}^{\infty} t^{\sigma} f(t)\,dt \to -(\sigma + \rho + 1)$$

khi $x \to \infty$.

Định nghĩa 2.2. (xem Định nghĩa 4 [5, tr.5]). Dãy các biến ngẫu nhiên $(X_n; n \ge 1)$ được gọi là bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X nếu với một số hữu hạn $C > 0$,

$$\sup_n P(|X_n| \ge t) \le CP(|X| \ge t) \text{ với mọi } t > 0.$$

Nếu $(X, X_n; n \ge 1)$ là dãy các biến ngẫu nhiên cùng phân phân phối xác suất thì $(X_n; n \ge 1)$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X.

Bổ đề 2.1. (Xem Bổ đề 1.2 [3]). Với bất kì biến ngẫu nhiên X và với bất kì hai số thực $q > 0, t > 0$ ta có:

(i) $E\left(|X|^q I(|X| \le t)\right) = q\int_0^t s^{q-1} P(|X| > s)\,ds - t^q P(|X| > t)$.

(ii) $E\left(|X|^q I(|X| > t)\right) \le q\int_t^{\infty} s^{q-1} P(|X| > s)\,ds + t^q P(|X| > t)$.

Nếu $E\left(|X|^q\right) < \infty$ thì ta thu được đẳng thức.

Định lí 2.2. (Bất đẳng thức c_r) (xem Định lí 2.2 [1, tr.127]). Cho $r > 0$. Giả sử rằng $E|X|^r < \infty$ và $E|Y|^r < \infty$. Khi đó:

$$E\left(|X+Y|^r\right) \le c_r\left(E|X|^r + E|Y|^r\right),$$

trong đó $c_r = \begin{cases} 1 & \text{khi } 0 < r \le 1 \\ 2^{r-1} & \text{khi } r > 1. \end{cases}$

Định lí 2.3. (xem Hệ quả 3 [6, tr.117]). Cho dãy các biến ngẫu nhiên $(X_n; n \ge 1)$ độc lập sao cho với $\alpha_n \in [0,2]$ nào đó $\sum_{n=1}^{\infty} E\left(|X_n|^{\alpha_n}\right) < \infty$, trong đó $E(X_n) = 0$ khi $1 \le \alpha_n \le 2$. Khi đó $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ hội tụ hầu chắc chắn.

Bổ đề 2.2. (Bổ đề Krocnerker) (xem Định lí 2.5.5 [4, tr.81]). Nếu $(a_n; n \ge 1)$ là dãy số thực thỏa mãn $0 < a_n \uparrow \infty$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_n}$ hội tụ thì $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to 0$.

Định lí 2.4. (xem Định lí 12.1 [1, tr.75]). Cho $r > 0$. Khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P(|X| \ge n) \le E|X|^r \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P(|X| \ge n).$$

3. Kết quả

Định lí 3.1. Cho $b \in RV(r)$ với $1 < r < 2$ là hàm số tăng và bị chặn địa phương trong $[0;\infty)$. Cho $(X_n; n \ge 1)$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập. Giả sử rằng $(X_n; n \ge 1)$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X sao cho $E\left(b(|X|)\right) < \infty$. Khi đó:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - E(X_n)}{b^{-1}(n)} \text{ hội tụ hầu chắc chắn.} \qquad (2)$$

Hơn nữa, dãy $(X_n; n \ge 1)$ tuân theo luật mạnh số lớn. Cụ thể là, $\frac{1}{b^{-1}(n)} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - E(X_k)\right) \to 0$ hầu chắc chắn khi $n \to \infty$.

Chứng minh. Với mỗi n ta đặt

$$U_n = X_n I\left(|X_n| \le b^{-1}(n)\right) - E\left(X_n I\left(|X_n| \le b^{-1}(n)\right)\right),$$

$$V_n = X_n I\left(|X_n| > b^{-1}(n)\right) - E\left(X_n I\left(|X_n| > b^{-1}(n)\right)\right).$$

Rõ ràng $X_n - E(X_n) = U_n + V_n$. Do đó để chứng minh (2) ta chứng minh:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{b^{-1}(n)} \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n}{b^{-1}(n)} \text{ hội tụ hầu chắc chắn.}$$

Trước hết ta chứng minh $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n}{b^{-1}(n)}$ hội tụ hầu chắc chắn. Áp dụng Bất đẳng thức c_r và Bổ đề 2.1 (ii) với $q = 1$ ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(|V_n|)}{b^{-1}(n)} \le 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\left(|X_n| I\left(|X_n| > b^{-1}(n)\right)\right)}{b^{-1}(n)}$$
$$\le 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{-1}(n)} \int_{b^{-1}(n)}^{\infty} P\left(|X_n| > s\right) ds$$
$$+ \ 2 \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n| > b^{-1}(n)\right).$$

Do $(X_n; n \ge 1)$ là dãy các biến ngẫu nhiên bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(|V_n|)}{b^{-1}(n)} \le C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{-1}(n)} \int_{b^{-1}(n)}^{\infty} P\left(|X| > s\right) ds$$
$$+ \ C \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X| > b^{-1}(n)\right).$$

Đặt

$$I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{-1}(n)} \int_{b^{-1}(n)}^{\infty} P\left(|X| > s\right) ds,$$

$$I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X| > b^{-1}(n)\right).$$

Kết hợp với b là hàm tăng ta có

$$I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(b(|X|) > n\right).$$

Do đó, theo Định lí 2.4 ta suy ra $I_2 < \infty$.

Tiếp theo ta chứng minh $I_1 < \infty$. Đặt $s = b^{-1}(n)t$, và áp dụng Định lí 2.4 ta có:

$$I_1 = \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X|/t > b^{-1}(n)\right) dt$$
$$= \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(b(|X|/t) > n\right) dt$$
$$\le \int_1^{\infty} E\left(b(|X|/t)\right) dt$$
$$= \int_1^{\infty} \int_0^{\infty} b(x/t) dP\left(|X| \le x\right) dt$$
$$= \int_0^{\infty} \left(\int_1^{\infty} b(x/t) dt \right) dP\left(|X| \le x\right)$$
$$:= I_{1,1} + I_{1,2},$$

trong đó

$$I_{1,1} := \int_0^{a} \left(\int_1^{\infty} b(x/t) dt \right) dP\left(|X| \le x\right),$$

$$I_{1,2} := \int_a^{\infty} \left(\int_1^{\infty} b(x/t) dt \right) dP\left(|X| \le x\right),$$

với a là một số dương. Trong tích phân $I_{1,2}$ ta đặt $y = x/t$ và với số dương a đủ lớn áp dụng Định lí 2.1 (i) ta có:

$$I_{1,2} = \int_a^\infty x\left(\int_0^x \frac{b(y)}{y^2}dy\right)dP(|X| \le x)$$
$$\le C\int_a^\infty b(x)dP(|X| \le x)$$
$$\le CE(b(|X|)) < \infty,$$

nhờ giả thiết của định lí. Bây giờ với a dương đủ lớn đó và áp dụng Định lí 2.1 (i) với $\sigma = -2$ thì

$$I_{1,1} = \int_0^a x\left(\int_0^x \frac{b(y)}{y^2}dy\right)dP(|X| \le x)$$
$$\le a\int_0^a \frac{b(x)}{x^2}dx \cdot \int_0^a dP(|X| \le x)$$
$$\le aP(0 < |X| \le a)\int_0^a \frac{b(x)}{x^2}dx$$
$$\le CP(0 < |X| \le a)b(a) < \infty.$$

Từ đó $I_1 < \infty$ và vì thế $\sum_{n=1}^\infty \frac{E(|V_n|)}{b^{-1}(n)} < \infty$. Áp dụng Định lí 2.3 ta suy ra $\sum_{n=1}^\infty \frac{V_n}{b^{-1}(n)}$ hội tụ hầu chắc chắn.

Bây giờ ta chứng minh $\sum_{n=1}^\infty \frac{U_n}{b^{-1}(n)}$ hội tụ hầu chắc chắn. Theo Định lí 2.3 ta chỉ cần chỉ ra

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{E(U_n^2)}{(b^{-1}(n))^2} < \infty.$$

Áp dụng Bất đẳng thức c_r và Bổ đề 2.1 (i) với $q = 2$ ta được

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{E(U_n^2)}{(b^{-1}(n))^2} \le 4\sum_{n=1}^\infty \frac{E\left(X_n^2 I\left(|X_n| \le b^{-1}(n)\right)\right)}{(b^{-1}(n))^2}$$
$$\le 8\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(b^{-1}(n))^2}\int_0^{b^{-1}(n)} sP(|X_n| > s)ds.$$

Đặt $s = b^{-1}(n)t$ và do $(X_n; n \ge 1)$ là dãy các biến ngẫu nhiên bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X và b là hàm dương tăng nên theo Định lí 2.4 ta có:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{E(U_n^2)}{(b^{-1}(n))^2} \le C\sum_{n=1}^\infty \int_0^1 tP\left(|X|/t > b^{-1}(n)\right)dt$$
$$\le C\int_0^1 t\sum_{n=1}^\infty P\left(b(|X|/t) > n\right)dt$$
$$\le C\int_0^1 tE\left(b(|X|/t)\right)dt$$
$$= C\int_0^1\int_0^\infty tb(x/t)dP(|X| \le x)dt$$
$$= C\int_0^\infty\left(\int_0^1 tb(x/t)dt\right)dP(|X| \le x)$$
$$= C(J_1 + J_2),$$

trong đó

$$J_1 := \int_0^d\left(\int_0^1 b(x/t)dt\right)dP(|X| \le x),$$
$$J_2 := \int_d^\infty\left(\int_0^1 b(x/t)dt\right)dP(|X| \le x),$$

với d là một số dương. Trong tích phân J_2 ta đặt $y = x/t$ và với số dương d đủ lớn áp dụng Định lí 2.1 (ii) ta suy ra:

$$J_2 = \int_d^\infty\left(x^2\int_x^\infty \frac{b(y)}{y^3}dy\right)dP(|X| \le x)$$
$$\le C\int_d^\infty b(x)dP(|X| \le x)$$
$$\le CE(b(|X|)) < \infty,$$

nhờ giả thiết của định lí. Bây giờ với số dương d đủ lớn đó và áp dụng Định lí 2.1 (ii) với $\sigma = -3$ thì

$$J_1 = \int_0^1 \left(\int_0^d tb(x/t)\, dP(|X| \le x) \right) dt$$

$$\le P(0 < |X| \le d) \int_0^1 tb(d/t) dt$$

$$= d^2 P(0 < |X| \le d) \int_d^\infty \frac{b(x)}{x^3} dx$$

$$\le CP(0 < |X| \le d)\, b(d) < \infty.$$

Vì thế, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(U_n^2)}{(b^{-1}(n))^2} < \infty$. Và (2) được chứng minh.

Cuối cùng, áp dụng Bổ đề Kronecker ta được dãy $(X_n; n \ge 1)$ tuân theo luật mạnh số lớn.

Định lí được chứng minh.

Chọn $b(x) = x^r$ với $1 < r < 2$ trong $(0; \infty)$ ta thu được luật mạnh số lớn Marcinkiewicz - Zydmund.

Hệ quả 3.1. Cho $(X_n; n \ge 1)$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố xác suất. Giả sử rằng $E(|X_1|^r) < \infty$ với $1 < r < 2$. Khi đó:

$\frac{1}{n^r} \sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k)) \to 0$ hầu chắc chắn khi $n \to \infty$.

4. Kết luận

Để thu được một sự mở rộng của luật mạnh số lớn loại Marcinkiewicz - Zydmund đối với dãy $(X_n; n \ge 1)$ các biến ngẫu nhiên độc lập không nhất thiết cùng phân bố xác suất chúng tôi đã đưa ra các điều kiện cho hàm số $b \in RV(r)$ và điều kiện moment cho dãy $(X_n; n \ge 1)$ bị chặn ngẫu nhiên bởi một biến ngẫu nhiên X.

Tài liệu tham khảo

[1] Allan Gut (2004). *Probability: A Graduate Course*. Springer.

[2] N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels (1987). *Regular Variation*. Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Gan Shixin (2010). On almost sure convergence of weighted sums of random element sequences. *Acta mathematica Scientia*, 30B(4), 1021-1028.

[4] Rick Durrett (2010). Probability: Theory and Examples. *Fourth Edition, Cambridge.*

[5] L.V. Dung, T.C. Son, N.T.H. Yen (2018). Weak Laws of Large Numbers for Sequences of Random Variables with Infinite rth Moments. *Acta. Math. Hunga*r. doi.org/10.1007/s10474-018-0865-0.

[6] Yuan Shih Chow (1997). Henry Teicher Probability Theory. *Third Edition Springer*.

AN EXTENSION OF MARCINKIEWICZ - ZYDMUND TYPE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS

Abstract: Let $(X_n; n \ge 1)$ be a sequence of random independent variables which is stochastically dominated by the random variable X. In this paper, using the definition and properties of regular varying function and theorem Karamata and more, we obtain the sequence $\frac{1}{b^{-1}(n)} \sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k)) \to 0$ converges almost surely when $n \to \infty$. So, if $(X_n; n \ge 1)$ is a sequence of independent and identically distributed random variables and $b(x) = x^r$ with $1 < r < 2$ then we obtain Marcinkiewicz - Zydmund strong law of large numbers for this sequence of the random variables. In another word, we present an extension of Marcinkiewicz – Zydmund type strong law of large numbers for a sequence of independently random variables which is stochastically dominated by the random variable, but not identically distributed.

Key words: regularly varying function; slowly varying function; stochastically dominated sequence of random variables; Marcinkiewicz - Zydmund strong law of large numbers; Karamata theory.