UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education – ISSN 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

Nhận bài:
15 – 01 – 2018
Chấp nhận đăng:
20 – 03 – 2018
http://jshe.ued.udn.vn/

PHƯƠNG PHÁP NEWTON NỬA TRƠN GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU CÓ ĐIỀU KIỆN "WATER-FILLING"

Dương Xuân Hiệp[a], Phan Quang Như Anh[b*]

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu phương pháp Newton nửa trơn để giải bài toán tối ưu có điều kiện "water-filling". Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu bài toán tối ưu water-filling - bài toán thực tế từ lí thuyết thông tin, đó là bài toán tối ưu dung lượng trong hệ thống truyền thông với nhiều đầu vào và nhiều đầu ra (MIMO). Chúng tôi nhắc lại khái niệm đạo hàm Newton và một số tính chất của nó. Sau đó, chúng tôi sử dụng các điều kiện KKT để đưa bài toán water-filling về việc giải bài toán tìm nghiệm của phương trình không trơn. Chúng tôi nghiên cứu tính khả vi Newton của hàm không trơn đó. Tiếp theo, chúng tôi áp dụng phương pháp Newton nửa trơn để giải phương trình này. Sự hội tụ tuyến tính của phương pháp Newton nửa trơn cho bài toán được chứng minh. Cuối cùng, chúng tôi trình bày các kết quả nghiệm số cho một vài ví dụ cụ thể.

Từ khóa: bài toán water-filling; điều kiện KKT; đạo hàm Newton; phương trình không trơn; phương pháp Newton nửa trơn.

1. Đặt vấn đề

Bài toán water-filling là bài toán thực tế từ lí thuyết thông tin. Đó là bài toán tối ưu dung lượng trong hệ thống truyền thông với nhiều đầu vào và nhiều đầu ra (MIMO). Những hệ thống như thế được đặc trưng bởi việc sử dụng nhiều anten ở máy phát và máy nhận để cải thiện hiệu suất. Để có một mô tả chi tiết, chúng tôi chỉ đến tài liệu [1, 2] và các tài liệu tham khảo trong tài liệu đó. Ở đây chúng tôi giới thiệu tóm tắt bài toán như được phát biểu trong [2].

Theo [2], khi phân bổ công suất x_i đến kênh i của các kênh truyền thông, thông tin được truyền bởi hệ thống MIMO có thể được mô tả bởi tổng tỉ lệ truyền thông, tính bởi:

$$I=\sum_{i=1}^{n}\log_2(1+\frac{x_i}{\delta^2}\lambda_i),$$

trong đó, δ^2 là sai số trung bình của tiếng ồn và x_i là lượng điện được giao, λ_i mô tả sự giảm xóc và có giá trị từ 0 đến 1. Để đơn giản, công thức trên có thể được viết lại thành:

$$I=\sum_{i=1}^{n}\log_2\left(\frac{1}{\delta^2\frac{1}{\lambda_i}}\left(\frac{\delta^2}{\lambda_i}+x_i\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\log_2\left(\frac{\delta^2}{\lambda_i}+x_i\right)-\log_2\left(\delta^2\frac{1}{\lambda_i}\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\log_2\left(\frac{\delta^2}{\lambda_i}+x_i\right)-\sum_{i=1}^{n}\log_2\left(\delta^2\frac{1}{\lambda_i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\log_2\left(\alpha_i+x_i\right)-c.$$

Bài toán tối ưu hóa đơn giản như sau: chúng ta muốn phân bổ cấp nguồn cho các kênh truyền thông để tối đa hóa tổng tỉ lệ truyền thông. Chúng tôi định nghĩa x_i là công suất phát được phân bổ cho kênh truyền thông thứ i. Tỉ lệ truyền thông của nó là

[a,b]Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng
*** Liên hệ tác giả**
Phan Quang Như Anh
Email: nhuanh83@gmail.com

$\log_2(\alpha_i + x_i)$. Chú ý rằng α_i luôn không âm. Hơn nữa, chúng tôi giới hạn tổng số lượng điện năng bằng 1, tức là 100%. Điều này dẫn đến bài toán:

$$Min - \sum_{i=1}^{n} \log_2(\alpha_i + x_i) \qquad (1)$$
$$x \geq 0,\ 1^T x = 1$$

Chú ý rằng:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= -\sum_{i=1}^{n} \log_2(\alpha_i + x_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(\alpha_i + x_i)}{\ln 2} \\ &= -\frac{1}{\ln 2}\sum_{i=1}^{n} \ln(\alpha_i + x_i) \end{aligned}$$

Nên ta có thể đưa bài toán (1) về bài toán sau:

$$Min - \sum_{i=1}^{n} \ln(\alpha_i + x_i) \qquad (2)$$
$$x \geq 0,\ 1^T x = 1$$

Để giải bài toán này, chúng ta chú ý rằng bài toán thỏa mãn điều kiện của Slater. Do đó, chúng ta có thể áp dụng điều kiện KKT để nhận được hệ các điều kiện ràng buộc cho nghiệm của bài toán. Để nhận được hệ như thế, đầu tiên chúng ta xác định hàm Lagrange:

$$L(x,\lambda,\upsilon) = -\sum_{i=1}^{n} \ln(\alpha_i + x_i) - \lambda^T x + \upsilon(1^T x - 1).$$

Áp dụng các điều kiện KKT, ta có:

$$x^* \geq 0,\ 1^T x^* = 1,\ \lambda^* \geq 0,\ \lambda_i^* x_i^* = 0,\ i = 1,..,n,$$

$$\nabla L(x^*,\lambda^*,\upsilon^*) = \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_i^* \geq 0 \\ \lambda_i^* x_i^* = 0 \\ \dfrac{1}{x_i^* + \alpha_i} + \lambda_i^* = \upsilon^*, i = 1,...,n \\ x_i^* \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^* = 1. \end{cases}$$

Khi đó:

Nếu $\upsilon^* < \frac{1}{\alpha_i}$ thì $\lambda_i^* = 0$ và $x_i^* = \frac{1}{\upsilon^*} - \alpha_i$.

Nếu $\upsilon^* \geq \frac{1}{\alpha_i}$ thì $\lambda_i^* = \upsilon^* - \frac{1}{\alpha_i}$ và $x_i^* = 0$.

Tóm lại, ta có:

$$x_i^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\upsilon^*} - \alpha_i & \text{khi } \upsilon^* < \dfrac{1}{\alpha_i} \\ 0 & \text{khi } \upsilon^* \geq \dfrac{1}{\alpha_i} \end{cases}$$

hay:

$$x_i^* = Max\left\{0, \frac{1}{\upsilon^*} - \alpha_i\right\}.$$

Kết hợp với điều kiện $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = 1$, ta cần xác định υ^* từ phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n} Max\left\{0, \frac{1}{\upsilon^*} - \alpha_i\right\} = 1. \qquad (3)$$

Như vậy, việc giải bài toán (1) tương đương với việc giải phương trình (3) theo nghĩa: nếu nghiệm của phương trình (3) tìm được thì nghiệm của bài toán (1) cũng tìm được và ngược lại.

Chú ý rằng, phương trình (3) là không khả vi vì thế các phương pháp thông thường như phương pháp giảm gradient, phương pháp Newton,... không thể áp dụng. Để giải những phương trình không trơn như thế, gần đây nhiều nhà toán học đã đề xuất các phương pháp mới như phương pháp Newton trơn hóa [9], phương pháp Newton nửa trơn [8], phương pháp tựa Newton nửa trơn [3],…

Trong bài báo này, chúng tôi áp dụng phương pháp Newton nửa trơn để giải phương trình (3). Bố cục của bài báo như sau: đầu tiên, chúng tôi nhắc lại khái niệm đạo hàm Newton và một số tính chất của nó. Sau đó, chúng tôi nghiên cứu tính khả vi Newton của hàm không trơn $F(x) = \sum_{i=1}^{n} Max\left\{0, \frac{1}{x} - \alpha_i\right\} - 1$ và sự tồn tại nghiệm của phương trình $F(x) = 0$. Tiếp theo, chúng tôi áp dụng phương pháp Newton nửa trơn để giải phương trình này. Cuối cùng, chúng tôi trình bày các kết quả nghiệm số cho một vài ví dụ cụ thể.

2.Đạo hàm Newton

Định nghĩa 2.1. Cho U là một tập con mở của R, $F: U \to R$ là một hàm số xác định trên U. Hàm F được gọi là khả vi Newton tại $x \in U$ nếu tồn tại hàm $G: U \to R$ thỏa

$$\lim_{h\to 0}\frac{|F(x+h)-F(x)-G(x+h)h|}{|h|}=0.$$

Khi đó, ta nói G là một đạo hàm Newton của F tại x.

Từ định nghĩa trên ta suy ra đạo hàm Newton của F tại một điểm là một hàm số chứ không phải là một số thực như đạo hàm cổ điển.

Chú ý 2.1. *Trong [5], các tác giả đã chỉ ra rằng:*

a) Đạo hàm Newton không có tính duy nhất.

b) Nếu hàm số F có đạo hàm cổ điển liên tục trong (a,b) thì F cũng có đạo hàm Newton tại mọi điểm trong (a,b) và F' cũng chính là một đạo hàm Newton của F.

c) Nếu f, g là hai hàm số có đạo hàm Newton tại x. Khi đó, các hàm số λf, $f \pm g$, fg cũng có đạo hàm Newton và một đạo hàm Newton của chúng tương ứng nhận được như công thức đạo hàm cổ điển [5].

Để giải (3), ta xét hàm

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\text{Max}\left\{0,\frac{1}{x}-\alpha_i\right\}-1. \quad (4)$$

Khi đó, phương trình (3) tương đương với phương trình:

$$F(x)=0, x\neq 0. \quad (5)$$

Trong phần tiếp theo chúng tôi xem xét tính khả vi Newton của hàm F cho bởi (4) và sự tồn tại nghiệm của phương trình (5).

3.Sự tồn tại nghiệm của phương trình (5) và đạo hàm Newton của hàm F

Định lí 3.1. Nếu $\alpha_i > 0, \forall i = 1,..,n$ thì phương trình (5) có nghiệm duy nhất $x^* > 0$.

Chứng minh.

+) Nếu $x<0$ thì $F(x)=-1<0$. Suy ra phương trình (5) không có nghiệm âm.

+) Trên $(0,+\infty)$, ta có F(x) liên tục. Đặt

$$\alpha = Min\{\alpha_i, i=1,..,n\};\ \beta = Max\{\alpha_i, i=1,..,n\}.$$

Chọn $x_1=\frac{1}{\alpha}$, $x_2=\frac{1}{\beta+1}$. Ta có:

$$F(x_1)=-1<0;$$

$$\begin{aligned}F(x_2)&=\sum_{i=1}^{n}Max\{0,\beta+1-\alpha_i\}-1\\&=\sum_{i=1}^{n}\{\beta+1-\alpha_i\}-1\\&=n\beta-\sum_{i=1}^{n}\{\alpha_i\}+n-1>0.\end{aligned}$$

Do đó, F(x) có ít nhất một nghiệm $x^* \in (x_2, x_1)$.

+) Mặt khác, F(x) đơn điệu giảm trên $(0,+\infty)$ vì F(x) là tổng của các hàm đơn điệu giảm

$$g_i(x)=Max\left\{0,\frac{1}{x}-\alpha_i\right\},\ i=1,..,n.$$

Vậy phương trình (5) có duy nhất một nghiệm $x^*>0$.

Định lí 3.2. *Hàm F(x) khả vi Newton* $\forall x \in (0,+\infty)$ *và giả sử* $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$ *thì*

$$F'(x)=\begin{cases}-\frac{n}{x^2}, & x\in\left(0,\frac{1}{\alpha_n}\right)\\ -\frac{n-1}{x^2}, & x\in\left[\frac{1}{\alpha_n},\frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)\\ \ldots & \\ -\frac{k-1}{x^2}, & x\in\left[\frac{1}{\alpha_k},\frac{1}{\alpha_{k-1}}\right)\\ \ldots & \\ 0, & x\in\left[\frac{1}{\alpha_1},+\infty\right)\end{cases}.$$

Chứng minh. Đặt $f_i(x)=\frac{1}{x}-\alpha_i$, $i=1,..,n$ và

$$g_i(x)=\text{Max}\{0,f_i(x)\},\ i=1,..,n.$$

Ta có

$$g_i'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}, & x<\frac{1}{\alpha_i}\\ 0, & x\geq\frac{1}{\alpha_i}\end{cases}.$$

Do

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$$

nên

$$0 < \frac{1}{\alpha_n} < \frac{1}{\alpha_{n-1}} < \cdots < \frac{1}{\alpha_1}.$$

Suy ra

$$F'(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i'(x)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{n}{x^2}, & x \in \left(0, \dfrac{1}{\alpha_n}\right) \\ -\dfrac{n-1}{x^2}, & x \in \left[\dfrac{1}{\alpha_n}, \dfrac{1}{\alpha_{n-1}}\right) \\ \dots & \\ -\dfrac{k-1}{x^2}, & x \in \left[\dfrac{1}{\alpha_k}, \dfrac{1}{\alpha_{k-1}}\right) \\ \dots & \\ 0, & x \in \left[\dfrac{1}{\alpha_1}, +\infty\right) \end{cases}.$$

Nhận xét 3.1.

+) Nếu $x < \frac{1}{\alpha_1}$ *thì* $F'(x) < 0.$

+) Phương trình (5) không có nghiệm $x^* \le 0.$

+) Trong trường hợp tổng quát, nếu α_i *chỉ có k giá trị khác nhau* $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k$ *với chỉ số bội tương ứng là* $m_1, m_2, .., m_k$ *thì bằng cách đặt*

$$f_i(x) = \frac{1}{x} - \beta_i,\ i = 1,..,k$$

ta có

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} m_i \operatorname{Max}\{0, f_i(x)\}.$$

Suy ra

$$F'(x) = \begin{cases} -\dfrac{m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1} + m_k}{x^2}, & x \in \left(0, \dfrac{1}{\beta_k}\right) \\ -\dfrac{m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1}}{x^2}, & x \in \left[\dfrac{1}{\beta_k}, \dfrac{1}{\beta_{k-1}}\right) \\ \dots & \\ -\dfrac{m_1 + m_2 + \cdots + m_{j-1}}{x^2}, & x \in \left[\dfrac{1}{\beta_j}, \dfrac{1}{\beta_{j-1}}\right) \\ \dots & \\ 0, & x \in \left[\dfrac{1}{\beta_1}, +\infty\right) \end{cases}.$$

4. Phương pháp Newton nửa trơn giải phương trình (5)

Giả sử x^* là nghiệm của phương trình (5). Áp dụng Giải thuật Newton nửa trơn [8] cho phương trình (5), ta nhận được giải thuật sau:

Đầu vào: Giá trị ban đầu $x_0 \in U\left(x^*, \varepsilon\right)$

1. Cho $k = 0,1,2,...$

2. Khởi tạo vòng lặp

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{F'\left(x_k\right)} F\left(x_k\right)$$

3. Nếu $F\left(x_{k+1}\right) \ne 0$ thì tiếp tục vòng lặp

4. Kết thúc vòng lặp nếu $F\left(x_{k+1}\right) = 0$

5. Kết thúc giải thuật.

Đầu ra: $x = \lim x_k$.

Sự hội tụ của giải thuật trên cho phương trình (5) được đưa ra trong định lí sau:

Định lí 4.1. *Với* $\varepsilon > 0$ *đủ bé, dãy* $\{x_k\}$ *sinh bởi Giải thuật Newton nửa trơn trên hội tụ tuyến tính đến nghiệm của phương trình (5).*

Chứng minh.

Giả sử x^* là nghiệm của phương trình (5). Theo chứng minh ở Định lí 3.1, ta có nghiệm $x^* \in \left(\frac{1}{\alpha_n + 1}, \frac{1}{\alpha_1}\right)$ do đó với $r_1 > 0$ đủ bé tồn tại

$U\left(x^*, r_1\right) \subset \left(\dfrac{1}{\alpha_n + 1}; \dfrac{1}{\alpha_1}\right)$. Từ Định lý 3.2 suy ra $\dfrac{1}{F'(x)}$ bị chặn trong $U\left(x^*, r_1\right)$.

Khi đó tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\left|\frac{1}{F'(x)}\right| < M \quad \forall x \in U\left(x^*, r_1\right).$$

Ta có

$$\left|x_1 - x^*\right| = \left|x_0 - \frac{1}{F'(x_0)} F(x_0) - x^*\right|$$

$$= \frac{1}{\left|F'(x_0)\right|} . \left|F'(x_0)\left(x_0 - x^*\right) - F(x_0) - F\left(x^*\right)\right|.$$

F khả vi Newton tại x^* nên tồn tại $0 < r_2 < \dfrac{1}{2M}$ sao cho với $x_0 \in U\left(x^*, r_2\right)$, ta có

$$\left|F'(x_0)\left(x_0 - x^*\right) - F(x_0) - F\left(x^*\right)\right| < r_2 . \left|x_0 - x^*\right|$$

Chọn x_0 sao cho $\left|x_0 - x^*\right| < \varepsilon$ với $\varepsilon \le \min\left\{r_1, r_2\right\}$, ta có

$$\left|x_1 - x^*\right| < M . \frac{1}{2M} . \left|x_0 - x^*\right| < \frac{1}{2}\left|x_0 - x^*\right|$$

Do đó với $x_0 \in U\left(x^*, \varepsilon\right)$ qua giải thuật trên ta có $x_1 \in U\left(x^*, \varepsilon\right)$.

Tương tự ta có $\left|x_k - x^*\right| < \dfrac{1}{2^{k-1}}\left|x_0 - x^*\right| \to 0$ khi $k \to \infty$.

Do đó dãy $\left\{x_k\right\}$ sinh bởi Giải thuật Newton nửa trơn trên hội tụ đến nghiệm của phương trình (5).

Hơn nữa, ta có

$$\left|x_{k+1} - x^*\right| = \frac{1}{\left|F'(x_k)\right|} . \left|F'(x_k)\left(x_k - x^*\right) - F(x_k) - F\left(x^*\right)\right|$$

$$< M . \left|F'(x_k)\left(x_k - x^*\right) - F(x_k) - F\left(x^*\right)\right| = o\left(\left|x_k - x^*\right|\right)$$

khi $k \to \infty$.

Vậy sự hội tụ của dãy $\left\{x_k\right\}$ sinh bởi Giải thuật Newton nửa trơn trên là hội tụ tuyến tính.

5. Một số ví dụ

Ví dụ 4.1: Xét trường hợp $n = 2,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2.$ Phương trình (5) trở thành:

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Max}\left\{0, \frac{1}{x} - \alpha_i\right\} - 1 = 0.$$

Bảng sau liệt kê các bước trong vòng lặp Newton nửa trơn với $x_0 = 0,3$.

Bảng 1. *Các bước trong vòng lặp Newton nửa trơn*

cho Ví dụ 4.1 với $x_0 = 0.32$

k	x_k	F	F’
0	0.32	2.25	-9.765625
1	0.5504	-0.183139535	-3.300982
2	0.49491968	0.041059753	-4.082541
3	0.504977081	-0.019712108	-3.92154
4	0.499950457	0.000396381	-4.000793
5	0.500049533	-0.000198112	-3.999208
6	0.499999995	3.92561E-08	-4
7	0.500000005	-1.9628E-08	-4
8	0.5	0	-4
9	0.5	0	-4

Chúng ta nhận được nghiệm xấp xỉ chỉ sau 7 vòng lặp. Điều này cho thấy sự hội tụ nhanh của phương pháp Newton nửa trơn cho phương trình này.

Ví dụ 4.2: Xét trường hợp

$$\mathrm{n} = 4,\ \alpha_1 = 1.3,\ \alpha_2 = 2.5,\ \alpha_3 = 3.7,\ \alpha_4 = 4.1.$$

Khi đó phương trình (5) trở thành:

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{4} \mathrm{Max}\left\{0, \frac{1}{\mathrm{x}} - \alpha_{\mathrm{i}}\right\} - 1 = 0.$$

Bảng sau liệt kê các bước trong vòng lặp Newton nửa trơn với $x_0 = 0.25$

Bảng 2. *Các bước trong vòng lặp Newton nửa*

cho Ví dụ 4.2 với $x_0 = 0.25$.

k	x_k	F	F'
0	0.25	3.5	-16
1	0.46875	-0.166666667	-4.551111
2	0.432128906	0.014124294	-5.355171
3	0.434766412	8.56849E-05	-5.290394
4	0.434782608	3.19189E-09	-5.29
5	0.434782609	0	-5.29
6	0.434782609	0	-5.29

Tương tự như trong Ví dụ 4.1, ở đây phương pháp Newton nửa trơn cũng nhận được nghiệm xấp xỉ chỉ sau 4 vòng lặp. Ví dụ này một lần nữa cho thấy tính hiệu quả của phương pháp Newton nửa trơn cho phương trình (5).

6. Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu phương pháp Newton nửa trơn để giải bài toán liên quan đến thuật toán water-filling. Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu thuật toán water-filling. Sau đó, chúng tôi sử dụng các điều kiện KKT để đưa bài toán của thuật toán water-filling về bài toán có thể giải được bằng phương pháp Newton nửa trơn. Chúng tôi nghiên cứu tính khả vi Newton của hàm $F(x)=\sum_{i=1}^{n} Max\left\{0,\frac{1}{x}-\alpha_i\right\}-1$ và sự tồn tại nghiệm của phương trình $F(x)=0$.

Sau đó, phương pháp Newton nửa trơn được áp dụng để giải phương trình. Sự hội tụ và tốc độ hội tụ bậc hai của phương pháp được chứng minh cho bài toán này. Các ví dụ số cho thấy, phương pháp hội tụ rất nhanh. Chỉ với số vòng lặp rất bé, nghiệm chính xác có thể nhận được.

Tài liệu tham khảo

[1] MIMO Iterative Waterfilling Algorithm". IEEE Transactions on Signal Processing, 57(5):1917–1935

[2] M. Wennstr¨om, M. Helin, A. Rydberg, and T. Oberg (2001). On the Optimality and Performance of Transmit and Receive Space Diversity in MIMO Channels. In IEE Technical Seminar on MIMO Communication Systems: From Concept to Implementation, London.

[3] Pham Quy Muoi, Dinh Nho Hào, Peter Maass, and Michael Pidcock (2013). Semismooth newton and quasi-newton methods in weighted l1 – regularization. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 21(5):665–693.

[4] Pham Quy Muoi, Dinh Nho Hào, Peter Maass, and Michael Pidcock (2016). Descent gradient methods for non-smooth minimization problems in ill-posed problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 298:105–122.

[5] Dương Xuân Hiệp, Phạm Quý Mười, Phan Đức Tuấn (2017). Một số tính chất cơ bản của đạo hàm Newton hàm một biến. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Đại học Đà Nẵng*, 9(118), 94-98.

[6] Stephan Wolf, Stephan M. Günther, M.Sc (2011). An Introduction to Duality in Convex Optimization. *Hauptseminar Innovative Internettechnologien und Mobilkommunikation*.

[7] Stephen Boyd (2004). *Convex Optimization*. Department of Electrical Engineering, Stanford University.

[8] Griesse, R., & Lorenz, D. A. (2008). A semismooth Newton method for Tikhonov functionals with sparsity constraints. *Inverse Problems*, 24(3), 035007.

[9] Qi, L. Q., & Sun, D. F. (2002). Smoothing functions and smoothing Newton method for complementarity and variational inequality problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 113(1), 121-147.

SEMISMOOTH NEWTON METHOD FOR WATER - FILLING PROBLEMS WITH SUM POWER CONSTRAINT

Abstract: In this paper, we investigate the semi-smooth Newton method for water - filling problems with sum power constraint. Initially, we introduce the optimal water-filling problem - the problem from information theory. It is an optimization problem in the communication system with multiple inputs and outputs (MIMO). We also review the definition of Newton derivative and some of its properties. Then we use KKT condition to transform water-filling to solve non-smooth equation. We study Newton differentiability of non-smooth function in this equation. After that, we propose the semi-smooth Newton method for solving the non-smooth equation. The linear convergence of semi-smooth Newton method is also proven. Finally, we present numerical solution in some examples.

Key words: water-filling problem; KKT condition; Newton derivative; nonsmooth equation; semismooth Newton method.