UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education - ISSN: 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN ĐỂ SÁNG TẠO VÀ CHỨNG MINH MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

Nhận bài:
11 – 03 – 2019
Chấp nhận đăng:
20 – 06 – 2019
http://jshe.ued.udn.vn/

Vũ Thị Tường Minh[a], Phạm Quý Mười[a*]

Tóm tắt: Trong Chương trình toán bậc phổ thông, các bài toán về bất đẳng thức là các dạng toán khó nhưng khá phổ biến và thường gặp trong các kì thi Trung học phổ thông, tuyển sinh đại học, thi học sinh giỏi toán quốc gia, Olympic toán khu vực và quốc tế. Có nhiều phương pháp khác nhau để giải các bài toán này, trong đó phương pháp sử dụng tuyến tiếp tỏ ra hiệu quả và thường được sử dụng trong nhiều trường hợp. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra hướng sáng tạo các bài tập chứng minh bất đẳng thức ứng dụng phương trình tiếp tuyến và có phương pháp giải cũng như một số nhận xét giúp định hướng cách giải cho học sinh, đưa ra một số ví dụ để học sinh luyện tập. Từ đó học sinh nắm rõ được bản chất của một số bất đẳng thức bằng phương pháp dùng tiếp tuyến.

Từ khóa: đồ thị lồi, lõm; tiếp tuyến; bất đẳng thức; chứng minh bất đẳng thức; sáng tạo bất đẳng thức; phương pháp tiếp tuyến.

1. Đặt vấn đề

Bất đẳng thức là một trong những dạng toán khó và đa dạng trong chương trình toán học phổ thông [1-4]. Rất nhiều học sinh khi thấy bài toán bất đẳng thức trong các đề thi cảm thấy e sợ và bỏ qua những bài toán này. Trong khi đó, có những bài toán bất đẳng thức chỉ cần áp dụng phương pháp đơn giản là có thể giải quyết được.

Có rất nhiều phương pháp khác nhau được nghiên cứu và giảng dạy cho học sinh như phương pháp khảo sát hàm số, phương pháp sử dụng phương trình tiếp tuyến, phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cơ bản như Bất đẳng thức Côsi, Bất đẳng thức hàm lồi,…[5-8]. Trong số các phương pháp đó, phương pháp sử dụng phương trình tiếp tuyến (ta gọi ngắn gọn là *phương pháp tiếp tuyến*) là một phương pháp đơn giản và dễ sử dụng. Phương pháp này còn có thể giúp giáo viên sáng tạo ra những bài toán bất đẳng thức mới một cách dễ dàng.

Với mong muốn tạo động lực học tập cho học sinh, giúp học sinh dần dần yêu thích và đam mê việc chứng minh bất đẳng thức, trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu cách sáng tạo ra bất đẳng thức ứng dụng tiếp tuyến, đưa ra phương pháp giải và một số ví dụ. Việc sáng tạo ra các bài toán mới về bất đẳng thức cũng là một trong các kĩ năng cần thiết và quan trọng cho các giáo viên khi tham gia ra các đề thi trong các kì thi trung học phổ thông quan trọng như các kì thi tốt nghiệp, các kì thi học sinh giỏi các cấp, các kì thi Olympic cấp khu vực, quốc gia, quốc tế,…

Bố cục của bài báo như sau: trong phần hai chúng tôi giới thiệu cơ sở lí thuyết được sử dụng để trình bày phương pháp tiếp tuyến. Tiếp theo, chúng tôi đưa ra cách sáng tạo các bài toán bất đẳng thức mới, phương pháp giải và một số ví dụ minh họa. Đây là kết quả quan trọng và có ý nghĩa nhất trong bài báo này. Cuối cùng, chúng tôi trình bày ở phần bốn một số ví dụ áp dụng.

2. Cơ sở lí thuyết

Trong bài báo này, chúng ta luôn giả sử D là một tập con khác rỗng của ¡ .

Định nghĩa 2.1. [1, Định nghĩa 1, trang 32]. (Hàm số một biến) Một quy tắc tương ứng f đi từ tập D vào ¡ thỏa mãn với mỗi giá trị của $x \in D$ tương ứng với

[a] *Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng*
*** Tác giả liên hệ**
Phạm Quý Mười
Email: pqmuoi@ued.udn.vn

một và chỉ một giá trị $y \in \mathbb{R}$ được gọi là một hàm số thực một biến số.

Khi đó, ta gọi x là biến số và $y = f(x)$ là hàm số của x. Tập hợp D được gọi là tập xác định của hàm số.

Định nghĩa 2.2. [1, Định nghĩa 1, trang 34]. (Đồ thị hàm số) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D. Đồ thị của hàm số f là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi x thuộc D.

Định nghĩa 2.3. [2, Định nghĩa 1, trang 151, 152]. (Tiếp tuyến, phương trình tiếp tuyến) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường cong (C). Giả sử (C) là đồ thị của hàm số khả vi $y = f(x)$ và $M_0(x_0, f(x_0)) \in (C)$. Kí hiệu $M(x, f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C).

a) Vị trí giới hạn của đường thẳng M_0M khi M di chuyển trên đường cong (C) dần về điểm M_0 được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0. Khi đó, M_0 được gọi là tiếp điểm.

b) Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là:

$$y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0).$$

Định nghĩa 2.4. [3, Định nghĩa 1, trang 25]. (Đồ thị lồi, lõm) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và có đồ thị là (C). Khi đó,

a) Đồ thị (C) gọi là lồi trên $(a;b)$ nếu tiếp tuyến tại mọi điểm trong $(a;b)$ của hàm số $y = f(x)$ luôn nằm phía trên đồ thị (C).

b) Đồ thị (C) gọi là lõm trên $(a;b)$ nếu tiếp tuyến tại mọi điểm trong $(a;b)$ của hàm số $y = f(x)$ luôn nằm phía dưới đồ thị (C).

Định lí 2.1.[4, Định lí Bezu, trang 196] *Đa thức $P(x)$ có nghiệm $x = x_0$ khi và chỉ khi $P(x)$ chia hết cho $x - x_0$.*

3. Phương pháp sáng tạo và chứng minh bất đẳng thức ứng dụng phương trình tiếp tuyến

Cơ sở của phương pháp sáng tạo và chứng minh bất đẳng thức sử dụng phương trình tiếp tuyến dựa trên kết quả sau:

Định lí 2.2. [3, Định lí 1, trang 25]. (Bất đẳng thức tiếp tuyến)

Kí hiệu D là một trong các tập hợp sau: $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$, hoặc $[a;b]$. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên D. Khi đó,

a) Nếu $f''(x) \geq 0, \forall x \in D$ thì

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \forall x, x_0 \in D. \quad (1)$$

b) Nếu $f''(x) \leq 0, \forall x \in D$ thì

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \forall x, x_0 \in D. \quad (2)$$

Đẳng thức trong hai bất đẳng thức trên xảy ra $\Leftrightarrow x = x_0$.

Từ định lí trên, ta có trong trường hợp a), tiếp tuyến tại mọi điểm có hoành độ x_0 thuộc D đều nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tương tự, trong trường hợp b) tiếp tuyến tại mọi điểm có hoành độ x_0 thuộc D đều nằm phía trên đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Định lí 2.3. (Định lí về nghiệm bội và tiếp tuyến)

a) Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi trong $(\alpha;\beta)$, liên tục trên $[\alpha;\beta]$, $x_0 \in (\alpha;\beta)$ và đường thẳng $y = ax + b$.

Nếu tồn tại hàm số $y = g(x)$ xác định tại x_0 sao cho:

$$f(x) - (ax + b) = (x - x_0)^k g(x), \quad (3)$$

với $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ thì đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại x_0.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[\alpha;\beta]$, có đạo hàm đến cấp hai trong $(\alpha;\beta)$, $x_0 \in (\alpha;\beta)$. Khi đó, nếu đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 thì tồn tại hàm số $y = g(x)$ xác định tại x_0 sao cho:

$$f(x) - (ax + b) = (x - x_0)^k g(x), \text{ với } k \geq 2, k \in \mathbb{N}.$$

với điều kiện $f(x) - (ax + b) = P(x).h(x)$ thỏa $P(x)$ là hàm đa thức và $h(x_0) \neq 0$.

Chứng minh: a) Từ (3) ta có: $f(x_0) = ax_0 + b$ (4). Mặt khác:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(ax+b)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{ax+b-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^k g(x)+\lim_{x\to x_0}\frac{ax+b-(ax_0+b)}{x-x_0}=a.$$

Như vậy: $f'(x_0)=a.$ Từ đó và (4) ta có: $b=f(x_0)-f'(x_0)x_0.$ Do đó, phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$ tại x_0 là:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=ax+b.$$

Ta có điều phải chứng minh.

b) Đường thẳng $y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x_0)=ax_0+b\\ f'(x_0)=(ax_0+b)'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P(x_0).h(x_0)=0\\ P'(x_0).h(x_0)+P(x_0).h'(x_0)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P(x_0)=0\\ P'(x_0)=0\end{cases}\text{ vì } h(x_0)\neq 0$$

Vì $P(x)$ là hàm đa thức và $P(x_0)=0$ nên theo định lí Bơzu suy ra:

$$P(x)=(x-x_0).Q(x)\Rightarrow P'(x)=Q(x)+(x-x_0).Q'(x).$$

Do $P'(x_0)=0$ nên:

$$Q(x_0)=0\Rightarrow Q(x)=(x-x_0)R(x)$$
$$\Rightarrow P(x)=(x-x_0)^2R(x)$$
$$\Rightarrow f(x)-(ax+b)=(x-x_0)^2R(x)h(x)$$
$$=(x-x_0)^k g(x)$$

với $k\geq 2, k\in\mathbb{N}$.

Ta có điều phải chứng minh.

3.1. Phương pháp sáng tạo ra bất đẳng thức ứng dụng phương trình tiếp tuyến

Để sáng tạo ra các bất đẳng thức ứng dụng phương trình tiếp tuyến, ta thường theo các bước sau:

Bước 1. Chọn ra một hàm số $y=f(x)$ tùy ý.

Bước 2. Dùng đồ thị hoặc dùng xét dấu đạo hàm cấp hai để khảo sát tính lồi (lõm) của hàm số $y=f(x)$. Từ đó, ta chọn ra một miền D sao cho hàm số khả vi và lồi (lõm) trên D, tức là, tiếp tuyến nằm trên (dưới) đồ thị của hàm số.

Bước 3. Viết phương trình tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ $x=\alpha_1, x=\alpha_2,..., x=\alpha_n\ (n\in\mathbb{N}^*)$ thuộc D gắn với n biến $x_1,x_2,...,x_n$. Từ đó, ta có các bất đẳng thức tương ứng.

Bước 4. Sử dụng bất đẳng thức trên với các biến mới, cộng các bất đẳng thức trên và thêm các điều kiện liên quan đến điều kiện xảy ra dấu bằng (nếu cần) để nhận được bài toán chứng minh bất đẳng thức mới.

Để minh họa cho phương pháp sáng tạo bài toán bất đẳng thức sử dụng phương trình tiếp tuyến, chúng tra xét một trường hợp sau: Giả sử hàm số $y=f(x)$ khả vi và lồi trên tập D.

Khi đó, các tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ $x_1=\alpha_1,\ x_2=\alpha_2,...,x_n=\alpha_n$. của hàm số $y=f(x)$ nằm dưới đồ thị, tức là, ta sẽ có các bất đẳng thức:

$$f(x_1)\geq f'(\alpha_1)(x_1-\alpha_1)+f(\alpha_1);$$
$$f(x_2)\geq f'(\alpha_2)(x_2-\alpha_2)+f(\alpha_2);$$
....
$$f(x_n)\geq f'(\alpha_n)(x_n-\alpha_n)+f(\alpha_n).$$

Một cách tương ứng, dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases}x_1=\alpha_1\\ x_2=\alpha_2\\ ...\\ x_n=\alpha_n\end{cases}.$$

Cộng tất cả các bất đẳng thức trên theo vế đồng thời thêm điều kiện liên quan đến các biến $x_1, x_2,...,x_n$ thỏa điều kiện dấu bằng xảy ra trong từng bất đẳng thức. Ví dụ, ta đưa ra điều kiện sau:

$$f'(\alpha_1)x_1+f'(\alpha_2)x_2+.....+f'(\alpha_n)x_n$$
$$=f'(\alpha_1)\alpha_1+f'(\alpha_2)\alpha_2+.....+f'(\alpha_n)\alpha_n.$$

Khi đó, ta có bài toán bất đẳng thức mới:

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\geq f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+...+f(\alpha_n).$$

hay $f(x_1)+f(x_2)+....+f(x_n)\geq C;\ C\in\mathbb{R}$.

Cuối cùng, chúng ta phát biểu lại bài toán bất đẳng thức với các điều kiện tương ứng của biến.

Ví dụ 3.1. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{1-3x}.$

Chúng ta tính đạo hàm cấp một và cấp hai:

$$f'(x)=\frac{2}{(1-3x)^2};\quad f''(x)=\frac{12(1-3x)}{(1-3x)^4};\forall x\neq\frac{1}{3}.$$

Dựa vào dấu $f''(x)$ thấy:

$x<\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow f''(x)>0,$ (tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị)

và

$x>\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow f''(x)<0.$ (tiếp tuyến nằm phía trên đồ thị)

Tiếp tuyến tại $x=1$ là $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2},$ nằm trên đồ thị hàm số $y=f(x),\forall x>\dfrac{1}{3}.$ Do đó: $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}\geq f(x);\ \forall x>\dfrac{1}{3}.$ Dấu bằng xảy ra khi $x=1.$

Ta thêm vào hai biến nữa, ta cũng sẽ có $\dfrac{1}{2}y-\dfrac{3}{2}\geq f(y);\ \forall y>\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{2}z-\dfrac{3}{2}\geq f(z);\ \forall z>\dfrac{1}{3}.$ Dấu bằng xảy ra khi $y=1$ và $z=1.$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta có:

$$f(x)+f(y)+f(z)\leq\frac{1}{2}(x+y+z)-\frac{9}{2}.$$

Và ta thêm vào điều kiện liên quan các biến: $x+y+z=3$ (thỏa điều kiện dấu bằng xảy ra khi $x=1,y=1$ và $z=1$).

Từ đó ta có bài toán bất đẳng thức: Cho $x,y,z>\dfrac{1}{3}$ và thỏa mãn $x+y+z=3.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{2x}{1-3x}+\frac{2y}{1-3y}+\frac{2z}{1-3z}\leq-2.$$

Ví dụ 3.2. Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+1}.$

Ta có:

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}};\quad f''(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}>0;\forall x.$$ Như vậy, mọi tiếp tuyến đều nằm phía dưới đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{x^2+1}.$

- Tiếp tuyến tại $x=1$: $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và tiếp tuyến tại $x=-1$: $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ đều nằm phía dưới đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^2+1}.$ Do đó: $f(x)\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2};\forall x.$ Dấu "=" xảy ra khi $x=1.$ Và $f(x)\geq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \forall x.$ Dấu "=" xảy ra khi $x=-1.$

- Ta thêm vào ba biến nữa, ta sẽ có

$$f(x)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad f(y)\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$f(z)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}z+\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad f(t)\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1;\ y=-1;\ z=1; t=-1.$

Cộng các bất đẳng thức trên lại ta có

$$f(x)+f(y)+f(z)+f(t)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y+z-t)+2\sqrt{2}.$$

Và ta thêm điều kiện liên quan các biến $x-y+z-t=4$ (thỏa điều kiện dấu "=" xảy ra: khi $x=1;\ y=-1;\ z=1; t=-1$).

Từ đó ta có bất đẳng thức:

Cho $x;y;z;t\in\mathbb{R};\ x-y+z-t=4.$ Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}+\sqrt{t^2+1}\geq4\sqrt{2}.$$

3.2. Phương pháp chứng minh bất đẳng thức ứng dụng phương trình tiếp tuyến

Trong phần này, ta xem xét bài toán chứng minh bất đẳng thức có dạng:

$$f(x_1)+...+f(x_n)\geq C$$

hoặc $f(x_1)+...+f(x_n)\leq C,$

kèm theo điều kiện của các biến $x_1,x_2,\ldots,x_n.$

Để chứng minh các bất đẳng thức dạng này, trong nhiều trường hợp, chúng ta có thể sử dụng phương pháp tiếp tuyến. Trong phần này, chúng ta sẽ trình bày phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp tiếp tuyến.

Để ứng dụng phương pháp tiếp tuyến, chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Dự đoán điều kiện xảy ra dấu "=": giả sử dấu bằng xảy ra khi $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$.

Bước 2. Xét hàm số $f(x)$ trên D (hàm $f(x)$ có được dựa vào bất đẳng thức). Xét tính lồi (lõm) hàm số $y = f(x)$ trên D. Chú ý rằng, chúng ta phải chọn tập D sao cho $\alpha_i \in D, \forall i = 1, 2, \ldots, n$ và hàm số $y = f(x)$ lồi hoặc lõm trên D.

Bước 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$. Dựa vào tính lồi (lõm) của hàm số để có được các bất đẳng thức tương ứng.

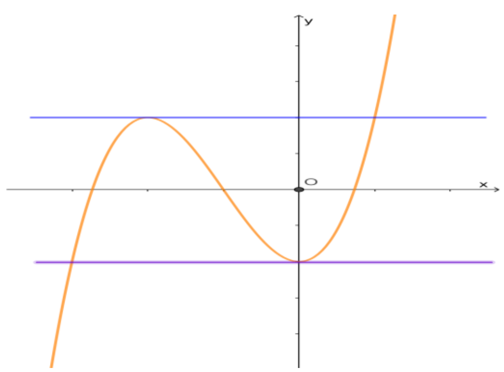
Bước 4. Cộng các bất đẳng thức theo vế, kết hợp điều kiện ta được điều phải chứng minh.

Chú ý:

1) Trong một số trường hợp, đồ thị hàm số có cả khoảng lồi, khoảng lõm trên D nên ta vẫn có trường hợp tiếp tuyến tại x_0 nằm trên hoặc nằm dưới đồ thị như Hình 1. Từ đó ta cũng có được đánh giá:

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),\ x_0 \in (a;b)$$

hoặc: $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),\ x_0 \in (a;b).$



Hình 1. *Đồ thị có cả khoảng lồi và lõm*

Khi đó, ngoài cách dùng Định lí 2.2 (xét dấu y'') chúng ta có thể chứng minh đánh giá trên bằng cách xét hiệu:

$$f(x) - \left(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right) = (x - x_0)^k g(x),$$

trong đó $g(x_0) \neq 0$, $k \geq 2, k \in ¥$ *, và ta sẽ kiểm nghiệm được* $g(x) \geq 0,\ \forall x \in D$ *hoặc* $g(x) \leq 0,\ \forall x \in D$.

2) Nếu gặp các bất đẳng thức thuần nhất hoặc đồng bậc ta nên chuẩn hóa, tùy vào đặc điểm từng bài mà ta có cách chuẩn hóa phù hợp để đưa về dạng dùng bất đẳng thức tiếp tuyến cơ bản.

Ví dụ 3.3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c)^2}{(b+c-a)^2 + a^2} + \frac{(a+c)^2}{(a+c-b)^2 + b^2} + \frac{(a+b)^2}{(a+b-c)^2 + c^2} \leq 6.$$

*** Nhận xét :**

Đây là bài tập bất đẳng thức đồng bậc. Với dạng này ta nên chuẩn hóa. Tùy vào đặc điểm từng bài mà ta có cách chuẩn hóa phù hợp để đưa bất đẳng thức về dạng các biến được cô lập dạng:

$$f(x_1) + ... + f(x_n) \geq \alpha$$

hoặc $f(x_1) + ... + f(x_n) \leq \alpha$.

Sau khi đưa về dạng bất đẳng thức như trên, ta đoán được dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Do đó, ta xét phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $x = \frac{1}{3}$ (có phương trình là $y = 2$). Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có khoảng lồi và khoảng lõm trên R nên ta có thể xét $f(x) - 2$ theo như Chú ý (1) để chứng minh bài toán.

Giải. Ta có vế trái của bất đẳng thức là các biểu thức cùng bậc, không mất tính tổng quát, giả sử $a + b + c = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành :

$$\frac{(1-a)^2}{(1-2a)^2 + a^2} + \frac{(1-b)^2}{(1-2b)^2 + b^2} + \frac{(1-c)^2}{(1-2c)^2 + c^2} \leq 6,$$

với $a, b, c \in (0;1)$.

Xét hàm số:

$$f(x) = \frac{(1-x)^2}{(1-2x)^2 + x^2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{5x^2 - 4x + 1},\quad \forall x \in (0;1).$$

Khi đó, bất đẳng thức trở thành:

$f(a)+f(b)+f(c)\le 6$, với $a,b,c\in(0;1)$.

Ta có :

$$f(x)-2=\frac{x^2-2x+1}{5x^2-4x+1}-2$$

$$=\frac{-9x^2+6x-1}{5x^2-4x+1}=\frac{-(3x-1)^2}{5x^2-4x+1}\le 0,\ \forall x\in(0;1).$$

Suy ra:

$$f(a)+f(b)+f(c)\le 2+2+2=6,$$

với mọi $a,b,c\in(0;1)$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

4. Một số ví dụ

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số ví dụ, có những ví dụ được tạo ra theo phương pháp được trình bày ở Mục 3 và cũng có những ví dụ nằm trong đề thi ở cấp trung học phổ thông.

a. Bài toán mới

Ví dụ 4.1. Cho $x,y,z>\frac{1}{3}$ thỏa mãn $x+y+z=3.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{2x}{1-3x}+\frac{2y}{1-3y}+\frac{2z}{1-3z}\le -2.$$

*** Cách sáng tạo bài toán:** đã trình bày ở Ví dụ 3.1 trong Mục 3.1.

*** Nhận xét**: Trong ví dụ này, chúng ta nhận thấy dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1,$ và bất đẳng thức tương đương với việc chứng minh $f(x)+f(y)+f(z)\le -2$, với $f(x)=\frac{2x}{1-3x}$, $x>\frac{1}{3}$. Do đó, ta xét phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $x=1$ và áp dụng Định lí 2.2 để chứng minh.

Giải: Xét hàm số: $f(x)=\frac{2x}{1-3x}$, $x>\frac{1}{3}$. Ta có:

$$f'(x)=\frac{2}{(1-3x)^2},\ f''(x)=\frac{12}{(1-3x)^3}<0,\quad x>\frac{1}{3}.$$

Áp dụng Định lí 2.2 ta có:

$$\begin{cases}\frac{2x}{1-3x}\le\frac{2}{(1-3.1)^2}(x-1)+\frac{2.1}{1-3.1}\\ \frac{2y}{1-3y}\le\frac{2}{(1-3.1)^2}(y-1)+\frac{2.1}{1-3.1}\\ \frac{2z}{1-3z}\le\frac{2}{(1-3.1)^2}(z-1)+\frac{2.1}{1-3.1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2x}{1-3x}\le\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\\ \frac{2y}{1-3y}\le\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}.\\ \frac{2z}{1-3z}\le\frac{1}{2}z-\frac{3}{2}\end{cases}$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta nhận được:

$$\frac{2x}{1-3x}+\frac{2y}{1-3y}+\frac{2z}{1-3z}\le\frac{1}{2}(x+y+z)-3.\frac{3}{2}=-2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1.$

Ví dụ 4.2. Cho $x,y,z,t\in$ ¡ thỏa mãn $x-y+z-t=4.$ Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}+\sqrt{t^2+1}\ge 4\sqrt{2}.$$

*** Cách sáng tạo bài toán:** đã trình bày ở Ví dụ 3.2 trong Mục 3.1.

***Nhận xét**: Trong ví dụ này ta nhận thấy dấu "=" xảy ra khi $x=1,y=-1,z=1;t=-1$ và bất đẳng thức tương đương với $f(x)+f(y)+f(z)+f(t)\ge 4\sqrt{2}$, với $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ nên ta xét phương trình tiếp tuyến của đồ thị hs y=f(x) tại x = 1 và tại x= -1; áp dụng Định lí 2.2 để chứng minh như bài giải.

Giải. Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Suy ra

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}};\qquad f''(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}>0;\forall x.$$

Áp dụng Định lí 2.2:

$$\begin{cases}f(x)\ge f'(1)(x-1)+f(1)\\ f(y)\ge f'(-1)(y+1)+f(-1)\\ f(z)\ge f'(1)(z-1)+f(1)\\ f(t)\ge f'(-1)(t+1)+f(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\\ f(y)\ge-\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}\\ f(z)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}z+\frac{\sqrt{2}}{2}\\ f(t)\ge-\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta nhận được:

$$f(x)+f(y)+f(z)+f(t)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y+z+t)+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=z=1; y=t=-1.$

Ví dụ 4.3. Cho x,y,z là các số thực không âm và $x+y+z=1.$ Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{1+3x^2}+\sqrt[3]{1+3y^2}+\sqrt[3]{1+3z^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

* **Cách sáng tạo bài toán:** Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{1+3x^2}.$

Ta có:

$$f'(x)=\frac{2x}{\sqrt[3]{\left(1+3x^2\right)^2}}, f''(t)=\frac{2-2t^2}{\sqrt[3]{\left(1+3t^2\right)^5}}>0,\forall t\in(0;1).$$

Như vậy, mọi tiếp tuyến đều nằm phía dưới đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt[3]{1+3x^2}.$

Ta xét tiếp tuyến tại $x=\frac{1}{3}$ có phương trình $y=\frac{\sqrt[3]{36}}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$ Vì các tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{1+3x^2}$ nên

$f(x)\ge\frac{\sqrt[3]{36}}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$ (Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{1}{3}$)

Ta thêm vào hai biến nữa, ta sẽ có:

$$f(x)\ge\frac{\sqrt[3]{36}}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.;$$

$$f(\mathrm{y})\ge\frac{\sqrt[3]{36}}{6}\left(y-\frac{1}{3}\right)+\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.;$$

$$f(\mathrm{z})\ge\frac{\sqrt[3]{36}}{6}\left(z-\frac{1}{3}\right)+\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}.$

Cộng ba bất đẳng thức cuối cùng theo vế, ta có

$$f(x)+f(y)+f(z)\ge\frac{\sqrt[3]{36}}{6}(x+y+z-1)+3\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

Từ đó, ta thêm điều kiện liên quan các biến: $x+y+z=1$ (thỏa điều kiện dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$).

Từ đó ta có bài toán bất đẳng thức: Cho x,y,z là các số thực không âm và $x+y+z=1.$ Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{1+3x^2}+\sqrt[3]{1+3y^2}+\sqrt[3]{1+3z^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

***Nhận xét**: Trong ví dụ này, chúng ta nhận thấy dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ và bất đẳng thức tương đương với

$$f(x)+f(y)+f(z)\ge 3\sqrt[3]{\frac{4}{3}},$$

với $f(t)=\sqrt[3]{1+3t^2},\forall t\in[0;1].$ Do đó, chúng ta xét phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $x=\frac{1}{3}$ và áp dụng Định lí 2.2 để chứng minh như bài giải dưới đây.

Giải. Xét hàm số:

$$f(x)=\sqrt[3]{1+3x^2},\forall x\in[0;1].$$

Ta có:

$$f'(x)=\frac{2x}{\sqrt[3]{\left(1+3x^2\right)^2}}, \text{ và}$$

$$f''(t)=\frac{2-2x^2}{\sqrt[3]{\left(1+3x^2\right)^5}}>0,\forall x\in[0;1].$$

Hàm số đã cho là lồi trên tập khảo sát. Áp dụng Định lí 2.2:

$$f(x)\ge f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$f(y)\ge f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$f(z)\ge f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Cộng ba bất đẳng thức này theo vế, ta được:

$$f(x)+f(y)+f(z)$$
$$\geq f'\left(\frac{1}{3}\right)(x+y+z-1)+3f\left(\frac{1}{3}\right)=3\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

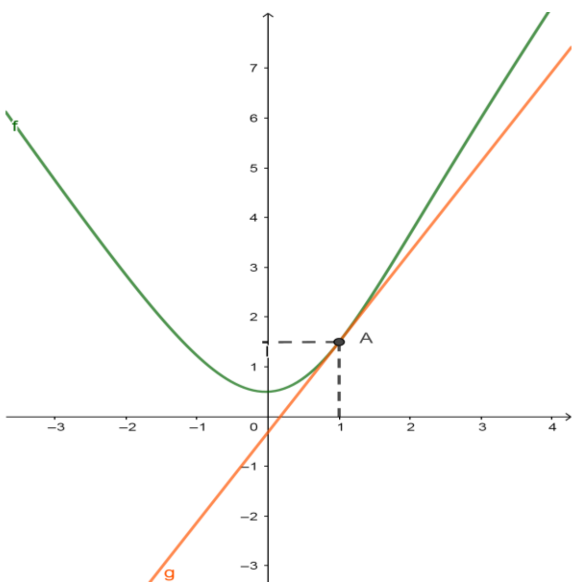
Ví dụ 4.4. Cho hai số thực dương x, y thỏa $x+y=2$. Chứng minh rằng :

$$\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}+\frac{2y^2+1}{\sqrt{y^2-y+4}}\geq 3.$$

*** Cách sáng tạo bài toán:**

Xét hàm số $f(x)=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}$.

Đồ thị hàm được minh họa ở Hình 2.



***Hình 2.** Đồ thị hàm số f(x)*

Từ đồ thị hàm số này, ta thấy: $x\in(0;2)$ thì đồ thị lõm (tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị). Tiếp tuyến tại $x=1$ là $y=\frac{29}{16}x-\frac{5}{16}$ nằm dưới đồ thị hàm số $y=f(x), \forall x\in(0;2)$. Do đó:

$$f(x)\geq\frac{29}{16}x-\frac{5}{16};\ \forall x\in(0;2).$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Ta thêm vào một biến nữa, ta cũng sẽ có $f(y)\geq\frac{29}{16}y-\frac{5}{16};\ \forall y\in(0;2)$. Dấu "=" xảy ra khi $y=1$.

Cộng các bất đẳng thức trên, ta có:

$$f(x)+f(y)\geq\frac{29}{16}(x+y)-\frac{5}{8};\ \forall x\in(0;2).$$

Và ta thêm vào điều kiện liên quan các biến: $x+y=2$ (thỏa điều kiện dấu bằng xảy ra khi $x=1, y=1$).

Từ đó ta có bài toán bất đẳng thức: Cho hai số thực dương x, y thỏa $x+y=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}+\frac{2y^2+1}{\sqrt{y^2-y+4}}\geq 3.$$

*** Nhận xét :**

Ta đoán được dấu "=" xảy ra khi $x=y=1$. Bất đẳng thức trên tương đương với $f(x)+f(y)\geq 3$ với $f(x)=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}};\ \forall x\in(0;2)$ nên ta xét phương trình tiếp tuyến của $f(x)=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}$ tại $x=1$ có dạng $y=\frac{29}{16}x-\frac{5}{16}$. Ta có thể xét $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}-\left(\frac{29}{16}x-\frac{5}{16}\right), \forall x\in(0;2)$ (1) theo chú ý 1 để chứng minh bài toán.

Giải. Ta xét hiệu:

$$\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}-\left(\frac{29}{16}x-\frac{5}{16}\right), \forall x\in(0;2). \quad (*)$$

+ Nếu $0<x\leq\frac{5}{29}$ thì $\frac{29}{16}x-\frac{5}{16}\leq 0$ và $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}>0;\ \forall x\in(0;2)$, do đó $(*)$ hiển nhiên đúng.

+ Nếu $\frac{5}{29}<x<2$ thì $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}+\left(\frac{29}{16}x-\frac{5}{16}\right)>0$,

do đó:

$$\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}-\left(\frac{29}{16}x-\frac{5}{16}\right)$$

$$=\frac{\frac{\left(2x^2+1\right)^2}{x^2-x+4}-\left(\frac{29}{16}x-\frac{5}{16}\right)^2}{\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}+\left(\frac{29}{16}x-\frac{5}{16}\right)},\forall x\in\left(\frac{5}{29};2\right)$$

$$=\frac{16^2\left(2x^2+1\right)^2-\left(29x-5\right)^2\left(x^2-x+4\right)}{16^2\left(x^2-x+4\right)\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}+\left(\frac{29}{16}x-\frac{5}{16}\right)\right)}\ge 0,\forall x\in\left(\frac{5}{29};2\right)$$

$$=\frac{\left(x-1\right)^2\left(183x^2+1497x+156\right)}{16^2\left(x^2-x+4\right)\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}+\left(\frac{29}{16}x-\frac{5}{16}\right)\right)}\ge 0,\forall x\in\left(\frac{5}{29};2\right).$$

Vì vậy, (*) đúng.

Vậy $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}\ge\frac{29}{16}x-\frac{5}{16},\ \forall x\in\left(0;2\right).$

Tương tự $\frac{2y^2+1}{\sqrt{y^2-y+4}}\ge\frac{29}{16}y-\frac{5}{16},\ \forall y\in\left(0;2\right).$

Do đó

$$\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}+\frac{2y^2+1}{\sqrt{y^2-y+4}}\ge\frac{29}{16}\left(x+y\right)-\frac{5}{8}=3,$$

với hai số thực dương x, y thỏa $x+y=2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$.

b. Một số bài toán trong các đề thi

Ví dụ 4.5. Cho a,b,c,d là các số thực dương sao cho $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng:

$$6\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+\frac{1}{8}.$$

(Trích đề thi France-2007)

***Nhận xét** : Chúng ta đoán được dấu "="xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{4}$. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)+f\left(d\right)\ge\frac{1}{8},$$

với $f\left(x\right)=6x^3-x^2,\forall x\in\left(0;1\right)$. Do đó, chúng ta xét phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại $x=\frac{1}{4}$, có phương trình $y=\frac{5x-1}{8}$. Vì đồ thị hàm số có khoảng lồi và khoảng lõm trên ¡ nên ta có thể xét $f\left(x\right)-\frac{5x-1}{8}$ như Chú ý 1 để chứng minh bài toán.

Giải. Xét hàm số: $f\left(x\right)=6x^3-x^2,\forall x\in\left(0;1\right)$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)+f\left(d\right)\ge\frac{1}{8}.$$

Ta có :

$$f\left(x\right)-\frac{5x-1}{8}=6x^3-x^2-\frac{5x-1}{8}$$
$$=\frac{\left(4x-1\right)^2\left(3x+1\right)}{8}\ge 0,\forall x\in\left(0;1\right).$$

Suy ra : $f\left(x\right)\ge\frac{5x-1}{8},\forall x\in\left(0;1\right).$

Do đó,

$$f\left(a\right)+f\left(b\right)+f\left(c\right)+f\left(d\right)\ge\frac{5\left(a+b+c+d\right)-4}{8}=\frac{1}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

Ví dụ 4.6. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\ge a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

(Trích đề thi Albania 2002)

*** Nhận xét:** Đây là dạng bài toán bất đẳng thức có dạng thuần nhất. Với dạng này, chúng ta nên chuẩn hóa để đưa bất đẳng thức về dạng:

$f(x_1)+...+f\left(x_n\right)\ge\alpha$ hoặc $f(x_1)+...+f\left(x_n\right)\le\alpha$.

Chúng ta thấy rằng đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$, nên chúng ta xét tiếp tuyến tại $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

của đồ thị hàm số $f(t)=\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.\frac{1}{t}-t,\ 0<t<1$ và áp dụng Định lí 2.2.

Giải. Vì bất đẳng thức đã cho là bất đẳng thức thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đúng với mọi số thực dương a,b,c thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Khi đó bất đẳng thức trên trở thành: $f(a)+f(b)+f(c)\ge 1,$ với

$$f(t)=\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.\frac{1}{t}-t,\ 0<t<1.$$

Ta có: $f''(t)=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{3\sqrt{3}t^3}>0,\ \forall t\in(0;1).$

Áp dụng Định lí 2.2, viết phương trình tiếp tuyến tại $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (xem Ví dụ 4.1) và cộng vế theo vế ta có:

$$\begin{aligned}&f(a)+f(b)+f(c)\\&\ge f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(a+b+c-\sqrt{3}\right)+3f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

Vì $\begin{cases}f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)<0\\ a+b+c\le\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\sqrt{3}\end{cases}$

nên $f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=1$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.Kết luận

Kết quả chủ yếu của bài báo này là sử dụng tính chất của phương trình tiếp tuyến đối với hàm lồi và hàm lõm để sáng tạo và đưa ra phương pháp giải đối với một số bài toán bất đẳng thức. Bài báo cũng đã trình bày một số ví dụ minh họa về cách sáng tạo và cách giải một số bài toán cụ thể. Các ví dụ được lấy từ các đề thi học sinh giỏi của một số nước trên thế giới cho thấy tính hiệu quả và khả năng áp dụng của phương pháp được nghiên cứu.

Tài liệu tham khảo

[1] Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Doãn Minh Cường, Đỗ Mạnh Hùng, Nguyễn Tiến Tài (2008). *Đại số 10 cơ bản*. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

[2] Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, Vũ Viết Yên (2010*). Đại số và giải tích 11 cơ bản*. Nhà xuất bản Giáo dục, Đà Nẵng.

[3] Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Tiến Tài, Cấn Văn Tuất (2010). *Giải tích 12 cơ bản*. Nhà xuất bản Giáo dục, Đà Nẵng.

[4] Phan Huy Khải (2002). *Toán Đại số nâng cao cho học sinh THPT*. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

[5] Trần Đình Cư (2015). *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi giải toán trên máy tính cầm tay Casio 570VNPLUS*. Nhà xuất bản Giáo dục.

[6] Phạm Kim Hùng (2007). *Sáng tạo bất đẳng thức*. Nhà xuất bản Hà Nội.

[7] Phan Huy Khải (2007). *Giải tích lồi và các bài toán sơ cấp*. Nhà xuất bản Giáo dục.

[8] Trần Phương, Võ Quốc Bá Cảnh, Trần Quốc Anh (2016). *Vẻ đẹp bất đẳng thức trong các kì thi Olympic Toán học*. Nhà xuất bản Giáo dục Quốc gia, Hà Nội.

APPLICATION OF TANGENT EQUATIONS TO CREATIVE AND PROVE SOME INEQUALITIES

Abstract: In high school math program, inequality problems are difficult but rather common and are often taken in high school exams, university admissions, national math competitions, regional and international math Olympic competitions. Among several ways to solve these problems the tangential methodis far effective and often applied in many cases. In this paper, we recommend some ways to create exercises proving inequalities by using the tangent equations, help students find solutions as well as give some examples to practice. Based on the comments, students clarify the nature of some inequalities by using tangential methods.

Key words: convex (concave) graph; tangent; inequality; solve inequalities; inequality creation; tangential methods.