UED Journal of Social Sciences, Humanities & Education - ISSN: 1859 - 4603

TẠP CHÍ KHOA HỌC XÃ HỘI, NHÂN VĂN VÀ GIÁO DỤC

PHỦ TỔNG QUÁT CỦA MÔĐUN VÀ MỘT VÀI KẾT QUẢ LIÊN QUAN

Đào Thị Trang[a], Nguyễn Quốc Tiến[a*], Trương Thị Thúy Vân[b]

Nhận bài:
23 – 07 – 2019
Chấp nhận đăng:
23 – 08 – 2019
http://jshe.ued.udn.vn/

Tóm tắt: Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu về các khái niệm phủ tổng quát của môđun, môđun đối bất biến tự đồng cấu và một vài tính chất của chúng. Bài báo cũng đưa ra một số kết quả liên quan đến bài toán Schroder-Bernstein đối ngẫu cho lớp môđun $\chi-$ đối bất biến đẳng cấu.

Từ khóa: $\chi-$phủ tổng quát; phủ xạ ảnh,; môđun $\chi-$ đối bất biến đẳng cấu; Định lí Schroder-Bernstein.

1. Giới thiệu về một số khái niệm

Singh và Srivastava trong [1] đã giới thiệu lớp môđun đối bất biến tự đẳng cấu, nó là khái niệm đối ngẫu của môđun bất biến tự đẳng cấu được nghiên cứu bởi Lee và Zhou trong [2]. Trong [3], Guil Asensio, Tutuncu và Srivastava đã tổng quát các khái niệm này và đưa ra một số kết quả đẹp. Phần đầu bài viết này, chúng tôi giới thiệu lại các khái niệm trên và làm rõ một số mối quan hệ giữa chúng. Phần sau của bài viết, chúng tôi đưa ra một số kết quả liên quan đến bài toán Schroder-Bernstein đối ngẫu cho lớp môđun $\chi-$ bất biến đẳng cấu. Chúng ta biết rằng, trong lí thuyết tập hợp, định lí Schroder-Bernstein phát biểu rằng: nếu tồn tại các đơn ánh $A \to B$ và $B \to A$ giữa hai tập hợp A và B, khi đó tồn tại một song ánh $A \to B$. Đối ngẫu, ta có, nếu tồn tại các toàn ánh $A \to B$ và $B \to A$ giữa hai tập hợp A và B, khi đó tồn tại một song ánh giữa A và B. Trong lí thuyết môđun, Bumby [4] đã chứng minh rằng phát biểu kiểu định lí Chroder-Bernstein đúng cho các môđun bất biến dưới tự đồng cấu của bao nội xạ. Trong [5], Guil Asensio đã chứng minh bài toán Schroder-Bernstein đúng đối với các môđun bất biến dưới tự đẳng cấu của bao nội xạ. Việc mở rộng bài toán Schroder-Bernstein trên môđun hiện nay vẫn đang được các nhà toán học tiếp tục nghiên cứu và hi vọng có nhiều kết quả thú vị. Trong suốt bài báo, vành R là vành kết hợp có đơn vị, mọi R-môđun là môđun unita. Ta kí hiệu M_R để chỉ M là một R-môđun phải, ${}_RM$ để chỉ M là một R-môđun trái. Khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, ta viết môđun M. Ký hiệu $A \le M$ để chỉ A là môđun con của M, $End(M)$ là tập tất cả các đồng cấu từ M đến M. Môđun con K của $R-$ môđun M được gọi là môđun con cốt yếu trong M, kí hiệu $K \le^e M$, nếu với mọi môđun con L của M mà $K \cap L = 0$ thì $L = 0$. Lúc này, ta cũng nói M là mở rộng cốt yếu của K. Đối ngẫu, chúng ta có khái niệm môđun con đối cốt yếu. Một môđun con K của $R-$ môđun M được gọi là môđun con đối cốt yếu trong M, kí hiệu $K \ll M$, nếu với mọi môđun con L của M mà $K + L = M$ thì $L = M$. Vành R mà mọi R-môđun phải đều có phủ xạ ảnh được gọi là vành hoàn chỉnh phải.

2.Phủ tổng quát và môđun $\chi-$ đối bất biến tự đồng cấu

Nhắc lại rằng, với một $R-$ môđun phải M, toàn cấu $p: P \to M$ được gọi là phủ xạ ảnh đối với M nếu P là $R-$ môđun xạ ảnh và p là toàn cấu đối cốt yếu

[a]Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm Tp HCM
bTrường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long
*** Tác giả liên hệ**
Nguyễn Quốc Tiến
Email: nguyenquoctien1982@gmail.com

(tức $\ker(p) = P$). Lúc này, ta cũng nói P là phủ xạ ảnh của M. Phủ xạ ảnh của M có các tính chất quan trọng sau:

Định lí 2.1. [10, Theorem 2.27] Cho P là phủ xạ ảnh của R- môđun phải M. Nếu Q là môđun xạ ảnh và $q: Q \to M$ là một toàn cấu, khi đó Q có sự phân tích thành tổng trực tiếp $Q = P_1 \oplus P_2$ với $P_1 \cong P, P_2 \subseteq Ker(q)$ và $q|_{P_1}: P_1 \to M$ là phủ xạ ảnh của M.

Định lí 2.2. [10, Theorem 2.27] Nếu $q: Q \to M$ và $p: P \to M$ là hai phủ xạ ảnh của M thì tồn tại đẳng cấu $f: Q \to P$ thỏa $pf = q$.

Cho χ là lớp các R- môđun phải. Ta nói χ đóng dưới các đẳng cấu nếu $M \in \chi$ và $N \cong M$ thì $N \in \chi$. Bây giờ chúng ta có khái niệm phủ tổng quát như sau:

Định nghĩa 2.3. Cho vành R và χ là lớp các R- môđun phải đóng dưới các đẳng cấu. Một χ- phủ tổng quát của một R- môđun phải M là một đồng cấu $p: X(M) \to M, X(M) \in \chi$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1) Với mọi đồng cấu $g: X'(M) \to M, X'(M) \in \chi$ tồn tại đồng cấu $f: X'(M) \to X(M)$ sao cho $g = pf$

$$\begin{tikzcd} X(M) \arrow[r, "p"] & M \\ X'(M) \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

2) Nếu mọi tự đồng cấu $f: X(M) \to X(M), X(M) \in \chi$ thỏa $p = pf$ thì f là một tự đẳng cấu.

$$\begin{tikzcd} X(M) \arrow[r, "p"] & M \\ X(M) \arrow[u, "f"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Nhận xét 2.4. 1) Dễ dàng thấy từ định nghĩa, nếu môđun M có hai χ- phủ tổng quát là $p: X(M) \to M$ và $p': X'(M) \to M$ thì $X'(M) \cong X(M)$.

2) Trong trường hợp χ là lớp các môđun xạ ảnh, χ- phủ tổng quát của môđun M chính là phủ xạ ảnh của M.

Thật vậy, gọi $p: X(M) \to M$ là χ- phủ tổng quát của M. Vì mọi môđun M là ảnh toàn cấu của một môđun xạ ảnh $X'(M)$ nào đó và kết hợp với điều kiện đầu của χ-phủ tổng quát ta suy ra p là một toàn cấu. Lấy L là mô dun con của $X(M)$ sao cho $L + \ker(p) = X(M)$, suy ra thu hẹp $p|_L: X(M) \to M$ là một toàn cấu. Do $X(M) \in \chi$ là xạ ảnh nên tồn tại đồng cấu $f: X(M) \to L$ sao cho $p = p|_L f$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "p|_L"] & M \arrow[r] & 0 \\ & X(M) \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "p"'] & \end{tikzcd}$$

Để ý $p|_L = pi$ với i là phép nhúng chính tắc L vào $X(M)$, do đó $p = pif = pf$. Theo điều kiện thứ hai của χ-phủ tổng quát ta có f là một tự đẳng cấu của $X(M)$, điều này suy ra $L = X(M)$. Vậy $\ker(p) = X(M)$ hay $p: X(M) \to M$ là phủ xạ ảnh của M. Ngược lại, lấy $p: P \to M$ là phủ xạ ảnh của M, rõ ràng p đúng với điều kiện thứ nhất của χ- phủ tổng quát. Giả sử có tự đồng cấu f của P thỏa điều kiện $p = pf$. Do $P = \ker(p) + f(P)$ và $\ker(p) = P$ nên $P = f(P)$, suy ra P là toàn cấu. Mặt khác dãy khớp $0 \to \ker(p) \to P \to P \to 0$ là chẻ ra do P là xạ ảnh, nên tồn tại đồng cấu $g: P \to P$ sao cho $fg = 1_p$ và khi đó g là đơn cấu với $P = g(P) + \ker(f)$. Do $p = pf$, nên $\ker(f) \subseteq \ker(p) = P$. Điều này suy ra $P = g(P)$, do đó g là một tự đẳng cấu. Do $fg = 1_p$ nên f cũng là một tự đẳng cấu. Vậy $p: P \to M$ là một χ- phủ tổng quát của M.

Định lí 2.5. [6, Theorem 1.2.10]. Giả sử $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ với $M_i, i = \overline{1,n}$ là môđun con của M, $p_i: X(M_i) \to M_i$ là các χ- bao tổng quát của M_i. Khi đó, $\oplus p_i: \oplus X(M_i) \to M$ là một χ- bao tổng quát của M.

Định nghĩa 2.6. Cho các R - môđun M, N và χ là lớp R - môđun đóng dưới các đẳng cấu. M được gọi là χ - N -xạ ảnh nếu tồn tại các χ - phủ tổng quát $p_M : X(M) \to M$ và $p_N : X(N) \to N$ sao cho với bất kì đồng cấu $g : X(M) \to X(N)$ tồn tại đồng cấu $f : M \to N$ sao cho $fp_M = p_N g$

$$\begin{tikzcd} X(M) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_M"] & X(N) \arrow[d, "p_N"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Nếu M là χ - M - xạ ảnh thì M được gọi là χ - đối bất biến tự đồng cấu; nếu với bất kì đẳng cấu $g : X(M) \to X(M)$ tồn tại đồng cấu $f : M \to M$ sao cho $fp_M = p_M g$ thì ta nói M là môđun χ - đối bất biến đẳng cấu. Như vậy, môđun χ - đối bất biến tự đồng cấu là môđun χ - đối bất biến đẳng cấu.

Từ định nghĩa, rõ ràng chúng ta có thể chứng minh được kết qua sau:

Bổ đề 2.7. Giả sử M là χ - N - xạ ảnh và N là χ - M - xạ ảnh với các χ - phủ tổng quát $p_M : X(M) \to M$ và $p_N : X(N) \to N$. Khi đó, nếu $X(M) \cong X(N)$, thì $M \cong N$.

Định nghĩa 2.8. Môđun M được gọi là đối bất biến đẳng cấu nếu với mọi môđun con đối cốt yếu K_1, K_2 của M, với mọi toàn cấu $f : M / K_1 \to M / K_2$ sao cho $\ker(f) = M / K_1$ thì f có thể nâng được thành một tự đồng cấu $f' : M \to M$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M/K_1 \arrow[r, "f"] & M/K_2 \end{tikzcd}$$

Nhận xét 2.9. Khi χ là lớp các môđun xạ ảnh và R là vành hoàn chỉnh thì R - môđun χ - đối bất biến đẳng cấu chính là R - môđun đối bất biến đẳng cấu.

Thật vậy, gọi $p : P \to M$ là phủ xạ ảnh của M ta được $\ker(p) = P$, $M \cong P/\ker(p)$ và $\pi : P \to P/\ker(p)$ là phủ xạ ảnh của $P/\ker(p)$. Khi đó, M là R - môđun χ - đối bất biến đẳng cấu khi và chỉ khi với mọi tự đẳng cấu g của P, tồn tại tự đẳng cấu f của $P/\ker(p)$ sao cho $f\pi = \pi g$,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & P \arrow[d, "\pi"] \\ P/ker(p) \arrow[r, "f"] & P/ker(p) \cong M \end{tikzcd}$$

Do đó $\pi g(\ker(p)) = f\pi(\ker(p)) = 0$, suy ra $g(\ker(p)) \le \ker(p)$. Vì g^{-1} là tự đẳng cấu nên ta cũng có $g^{-1}(\ker(p)) \le \ker(p)$. Vậy $g(\ker(p)) = \ker(p)$. Áp dụng [1, Theorem 27] ta được $P/\ker(p)$ là môđun đối bất biến đẳng cấu hay M là môđun đối bất biến đẳng cấu.

3.Một số kết quả liên quan bài toán Schroder-Bernstein đối ngẫu

Cho χ là lớp R - môđun đóng dưới tổng trực tiếp hữu hạn. Ta có các định nghĩa sau:

Định nghĩa 3.1. Một đồng cấu $p : M \to N$ được gọi là một χ - toàn cấu mạnh thuần túy (SPE) nếu với bất kì đồng cấu $f : X \to N$, $X \in \chi$, có thể nâng đến một đồng cấu $g : X \to M$ sao cho $pg = f$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] & N \\ X \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f"] & \end{tikzcd}$$

Định nghĩa 3.2. Một môđun M được gọi là χ - đối đóng mạnh thuần túy (SPCC) nếu với mọi môđun thương N của M thì phép chiếu chính tắc $p : M \to N$ là một χ - SPE.

Trong phần còn lại sau đây, ta giả thiết χ là lớp môđun mà mọi R - môđun đều có χ - phủ tổng quát. Kết quả sau là một trong các kết quả chính của bài báo.

Định lí 3.3. Cho A là R - môđun χ - SPCC, B là môđun thương χ - đối bất biến tự đồng cấu của A thỏa A là χ - B - xạ ảnh và B là χ - A - xạ ảnh. Gọi $p_A : X(A) \to A, p_B : X(B) \to B$ là các toàn cấu χ - phủ tổng quát của lần lượt A, B. Khi đó, nếu tồn tại một χ - SPE $\varphi : B \to A$ thì $A \cong B$.

Chứng minh. Gọi $\mu : A \to B$ là phép chiếu chính tắc, khi đó μ là một $\mathcal{C}$ - SPE. Ta có $\mu p_A : X(A) \to B$ thỏa điều kiện thứ nhất của $\mathcal{C}$ - phủ tổng quát nên tồn tại một đồng cấu $f_1 : X(B) \to X(A)$ sao cho $\mu p_A f_1 = p_B$. Hơn nữa, do $p_B : X(B) \to B$ là một phủ tổng quát nên tồn tại đồng cấu $f_2 : X(A) \to X(B)$ với $\mu p_A = p_B f_2$. Khi đó, $p_B = p_B(f_2 f_1)$, và do đó $f_2 f_1$ là một đẳng cấu. Điều này suy ra f_2 là một toàn cấu chẻ ra. Tương tự ta cũng được một toàn cấu chẻ ra $g_2 : X(B) \to X(A)$ sao cho $\varphi p_B = p_A g_2$. Vì $f_2 g_2 : X(B) \to X(B)$ cũng là toàn cấu chẻ ra nên tồn tại tự đồng cấu v của $X(B)$ sao cho $(f_2 g_2)v = 1$. Thêm nữa, do B là một môđun $\mathcal{C}$ - đối bất biến tự đồng cấu nên tồn tại một tự đồng cấu w của B thỏa $w p_B = p_B v$. Từ đó ta có:

$$p_B = p_B f_2 g_2 v = \mu p_A g_2 v = \mu\varphi p_B v = (\mu\varphi w) p_B.$$

Vì p_B là toàn cấu nên $\mu\varphi w = 1_B$, hay μ là toàn cấu chẻ ra và suy ra B là đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của A. Do đó ta có thể giả sử B là hạng tử trực tiếp của A. Đặt $A = H \oplus B$. Xét toàn cấu $\varphi : B \to A$. Khi đó, $\varphi^{-1}(A) \supseteq \varphi^{-1}(H) + \varphi^{-1}(B)$ và

$$\begin{aligned} A &= H \oplus B \\ &\supseteq H \oplus \varphi^{-1}(A) \\ &\supseteq H \oplus [\varphi^{-1}(H) + \varphi^{-1}(B)] \\ &\supseteq H \oplus [\varphi^{-1}(H) + \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(A))] \\ &\supseteq H \oplus [\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi^{-1})^k (H)]. \end{aligned}$$

với $(\varphi^{-1})^k(H) = \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(\ldots\varphi^{-1}(H)\ldots))$. Đặt $P = H \oplus [\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi^{-1})^k (H)]$ ta được:

$$B \cap P = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi^{-1})^k (H) = \varphi^{-1}(P).$$

Hơn nữa, do φ là toàn cấu do đó $P = \varphi(B \cap P)$. Lấy $\pi_1 : B \to B / B \cap P = \bar{B}$ là phép chiếu tự nhiên, vì A là một môđun $\mathcal{C}$ - SPCC nên B cũng vậy, điều này suy ra π_1 là một $\mathcal{C}$ - SPE. Khi đó, $\pi_1 p_B$ thỏa điều kiện thứ nhất của phủ tổng quát. Do đó, tồn tại đồng cấu $u : X(\bar{B}) \to X(B)$ thỏa $\pi_1 p_B u = p_{\bar{B}}$

$$\begin{tikzcd} X(B) \arrow[r, "p_B"] & B \arrow[r, "\pi_1"] & \bar{B} \\ X(\bar{B}) \arrow[u, "u"] \arrow[urr, "p_B"'] & & \end{tikzcd}$$

Ta có p_B là phủ tổng quát nên có một đồng cấu $h : X(B) \to X(\bar{B})$ thỏa $p_{\bar{B}} h = \pi_1 p_B$. Suy ra $p_{\bar{B}} = p_{\bar{B}} hu$. Điều này suy ra hu là một đẳng cấu, do đó h là một toàn cấu chẻ ra. Lấy $k : X(\bar{B}) \to X(B)$ là đồng cấu sao cho $hk = 1_{X(\bar{B})}$.

Khi đó, k là đơn cấu chẻ ra với $\mathrm{Im}(h)$ là hạng tử trực tiếp của $X(B)$ và $(kh)^2 = kh$. Hơn nữa, vì B là một môđun $\mathcal{C}$ - đối bất biến tự đồng cấu nên tồn tại $\alpha : B \to B$ sao cho $\alpha p_B = p_B kh$. Vậy $\alpha(B) = (p_B k)(X(\bar{B}))$ và

$$0 = p_B(1 - kh)(kh) = p_B(kh) - p_B(kh)(kh) = (\alpha - \alpha^2) p_B.$$

Do p_B là đẳng cấu nên $\alpha = \alpha^2$ và do đó $\alpha(B)$ là hạng tử trực tiếp của B. Do đó tồn tại đồng cấu $\iota : \alpha(B) \to B$ sao cho $\alpha\iota = 1_{\alpha(B)}$. Bây giờ chúng ta chứng minh $p_B k : X(\bar{B}) \to (p_B k)(X(\bar{B}))$ là một phủ tổng quát. Thật vậy, lấy $f : X' \to (p_B k)(X(\bar{B})) = \alpha(B)$ là một đồng cấu với $X' \in \mathcal{C}$. Xét biểu đồ sau:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"] & \alpha(B) \arrow[r, "\iota"] & B \\ X(B) \arrow[urr, "p_B"'] & & \end{tikzcd}$$

Khi đó, tồn tại một đồng cấu $\beta : X' \to X(B)$ với $p_B \beta = \iota f$. Lấy $g = h\beta$, và do đó

$$p_B kg = p_B khb = a p_B b = a i f = f.$$

Suy ra $p_B k : X(\bar{B}) \to (p_B k)(X(\bar{B}))$ thỏa điều kiện đầu của phủ tổng quát. Để chứng minh $p_B k : X(\bar{B}) \to (p_B k)(X(\bar{B}))$ là một c - phủ tổng quát, theo [6, Corollary 1.2.8] ta chỉ cần chỉ ra không tồn tại hạng tử trực tiếp $L \neq 0$ của $X(\bar{B})$ chứa trong $\ker(p_B k)$. Giả sử có L như vậy, khi đó $k(L) \neq 0$ và chứa trong $\ker(p_B)$. Vì k là đơn cấu chẻ ra nên $k(L)$ là hạng tử trực tiếp của $\mathrm{Im}(k)$ và do đó $k(L)$ là hạng tử trực tiếp của $X(B)$. Điều này mâu thuẫn với phủ tổng quát của p_B. Vậy $p_B k : X(\bar{B}) \to (p_B k)(X(\bar{B})) = a(B)$ là một phủ tổng quát.

Bây giờ, lấy K là môđun con của B sao cho $B = a(B) \oplus K$, do đó $A = H \oplus a(B) \oplus K$. Theo cách xây dựng P, ta có $A / P \cong B / (B \cap P)$ và

$$A / (P \cap B) \cong A / P \oplus A / B \cong A / P \oplus H \cong [B / (B \cap P)] \oplus H.$$

Hơn nữa, xét đồng cấu $f : A / (P \cap B) \to A / P$ với $f(a + P \cap B) = j(a) + P$. Ta có, do j là toàn cấu nên với $a \in A$ tồn tại $b \in B$ sao cho $a = j(b)$ hay với mọi $a + P$ tồn tại $b + P \cap B$ sao cho $f(b + P \cap B) = j(b) + P = a + P$, do đó f là toàn cấu. Mặt khác, $f(a + P \cap B) = 0$ khi và chỉ khi $j(a) \in P = j(P \cap B)$. Do đó, $a \in Ker(j) + (P \cap B) = P \cap B$, hay f là đơn cấu. Vậy f là đẳng cấu. Ta có $A / (P \cap B) \cong A / P$ điều này suy ra $B / (B \cap P) \cong [B / (B \cap P)] \oplus H$. Như vậy, ta có $X(\bar{B}) \cong X(\bar{B}) \oplus X(H)$. Từ giả thiết, chúng ta có thể kiểm tra $a(B)$ và $a(B) \oplus H$ là c - xạ ảnh tương hỗ. Mặt khác, ta có $X(\bar{B}) \to a(B)$ và $X(\bar{B}) \oplus X(H) \to a(B) \oplus H$ là các phủ tổng quát. Theo Bổ đề 2.7, ta có $a(B) \cong a(B) \oplus H$. Khi đó, $B = a(B) \oplus K \cong a(B) \oplus H \oplus K = A.$

Trong phép chứng minh trên, nếu chúng ta giả thiết A là các môđun c - đối bất biến tự đồng cấu thì ta được $a(B) \oplus H$ cũng là môđun c - đối bất biến tự đồng cấu do là hạng tử trực tiếp của A và do đó suy ra được $a(B)$ và $a(B) \oplus H$ là c - xạ ảnh tương hỗ. Vậy ta có hệ quả sau:

Hệ quả 3.4. Cho c là lớp môđun mà mọi R - môđun đều có c - phủ tổng quát, và A, B là các môđun c - đối bất biến tự đồng cấu với các toàn cấu c - phủ tổng quát tương ứng $p_A : X(A) \to A, p_B : X(B) \to B$. Giả sử A là một môđun c - SPCC và B là môđun thương của A. Nếu tồn tại một c - SPE từ B vào A thì $A \cong B$.

Trên vành hoàn chỉnh các môđun phải tựa xạ ảnh cũng chính là môđun phải đối bất biến tự đồng cấu . Do đó, từ hệ quả 3.4, ta có kết quả sau:

Hệ quả 3.5. Cho A, B là các môđun phải tựa xạ ảnh trên vành hoàn chỉnh R. Nếu tồn tại các toàn cấu $A \to B$ và $B \to A$ thì $A \cong B$.

Một trong những mở rộng quan trọng của lớp môđun tựa xạ ảnh là lớp môđun giả xạ ảnh. Một môđun M được gọi là giả xạ ảnh nếu bất kì toàn cấu $f : M \to K$ và mỗi toàn cấu $g : M \to K$, thì tồn tại một tự đồng cấu $h : M \to M$ sao cho $fh = g$. Như chúng ta được biết, trên vành hoàn chỉnh thì lớp các môđun giả xạ ảnh và lớp các môđun đối bất biến đẳng cấu trùng nhau. Tiếp theo chúng ta có kết quả sau:

Định lí 3.6. Cho M và N là các môđun giả xạ ảnh trên vành hoàn chỉnh phải R. Nếu tồn tại các toàn cấu $f : M \to N$ và $g : N \to M$ thì $M \cong N$.

Chứng minh. Theo giả thiết $f : M \to N$ và $g : N \to M$ là các toàn cấu và M, N là các môđun giả xạ ảnh nên f và g là các toàn cấu chẻ ra. Gọi $f' : N \to M$ và $g' : M \to N$ là các đồng cấu sao cho $ff' = 1$ và $gg' = 1$. Lấy $p_M : P_M \to M$ và $p_N : P_N \to N$ là các phủ xạ ảnh của M và N. Do đó, có một đẳng cấu $h : P_M \to P_N$. Không mất tính tổng quát, giả sử $M = P_M / \ker(p_M)$ và $N = P_N / \ker(p_N)$. Đặt $M' = h^{-1}(\ker(p_N)) + \ker(p_M)$ và $N' = h(\ker(p_M)) + \ker(p_N)$, ta được $M' = P_M$ và

$N' = P_N$ và $h(M') = N'$, $h^{-1}(N') = M'$. Khi đó tồn tại các đồng cấu $\bar{h}, \bar{h}^{-1}$ sao cho các sơ đồ giao hoán:

$$\begin{tikzcd} P_M \arrow[r, "h"] \arrow[d] & P_N \arrow[d] \\ P_M/M' \arrow[r, "\bar{h}"] & P_N/N' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P_N \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[d] & P_M \arrow[d] \\ P_N/N' \arrow[r, "\bar{h}^{-1}"] & P_M/M' \end{tikzcd}$$

Đặt $p_1 : P_M / \ker(\pi_M) \to P_M / M'$ và $p_2 : P_N / \ker(\pi_N) \to P_N / N'$ là các phép chiếu tự nhiên. Xét sơ đồ các đồng cấu:

$$\begin{tikzcd} M = P_M/ker(\pi_M) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\alpha"] & P_M/M' \arrow[d, "\bar{h}"] & \\ N = P_N/ker(\pi_N) \arrow[r, "p_2"] & P_N/N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Vì N là môđun giả xạ ảnh nên tồn tại $k : P_N / ker(\pi_N) \to P_N / ker(\pi_N)$ sao cho $p_2 k = \bar{h} p_1 g$. Do $gg' = 1$ nên tồn tại đồng cấu $\alpha : P_M / ker(\pi_M) \to P_N / ker(\pi_N)$ sao cho $p_2 \alpha = \bar{h} p_1$. Một cách tương tự, tồn tại đồng cấu $\beta : P_N / ker(\pi_N) \to P_M / ker(\pi_M)$ sao cho $p_1 \beta = \bar{h}^{-1} p_2$

$$\begin{tikzcd} N = P_N/ker(\pi_N) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\beta"] & P_N/N' \arrow[d, "\bar{h}^{-1}"] & \\ M = P_M/ker(\pi_M) \arrow[r, "p_1"] & P_M/M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Vậy ta có sơ đồ các đồng cấu sau:

$$\begin{tikzcd} P_M/ker(\pi_M) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\alpha"] & P_M/M' \arrow[d, "\bar{h}"] \\ P_N/ker(\pi_N) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\beta"] & P_N/N' \arrow[d, "\bar{h}^{-1}"] \\ P_M/ker(\pi_M) \arrow[r, "p_1"] & P_M/M' \end{tikzcd}$$

Khi đó, $p_1 \beta\alpha = \bar{h}^{-1} p_2 \alpha = \bar{h}^{-1} \bar{h} p_1 = p_1$. Do đó, $p_1(1 - \beta\alpha) = 0$ hay $\mathrm{Im}(1 - \beta\alpha) \subseteq \ker(p_1)$. Vì $\ker(p_1) = M'/\ker(\pi_M)$ với $\ker(\pi_M) = P_M$ và $M' = P_M$, suy ra $\ker(p_1) = P_M / \ker(\pi_M)$. Do đó, $\mathrm{Im}(1 - \beta\alpha) = P_M / \ker(\pi_M)$. Do $M = P_M / \ker(\pi_M)$ là môđun giả xạ ảnh nên, $1 - \beta\alpha \in J\left(\mathrm{End}\left(M\right)\right)$. Suy ra $\beta\alpha$ là khả nghịch trong End(M), đồng thời $\alpha\beta$ cũng khả nghịch trong End(M). Vậy α là một đẳng cấu.

Chúng ta biết rằng, trên vành hoàn chỉnh các môđun phải giả xạ ảnh cũng chính là môđun phải đối bất biến đẳng cấu. Do đó, ta có kết quả hiển nhiên sau:

Hệ quả 3.7. Cho M và N là các môđun đối bất biến đẳng cấu trên vành hoàn chỉnh phải R. Nếu tồn tại các toàn cấu $f : M \to N$ và $g : N \to M$ thì $M \cong N$.

Tài liệu tham khảo

[1] S. Singh, A.K. Srivastava (2012). Dual automorphism-invariant modules. *J. Algebra*, 371, 262-275.

[2] T.K. Lee, Y. Zhou (2013). Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls. *J. Algebra Appl*., 12 (2).

[3] P. A. Guil Asensio, D. K. Tutuncu and A. K. Srivastava (2015). Modules invariant under automorphisms of their covers and envelopes. *Israel Journal of Mathematics*, 206, 457-482.

[4] R. T. Bumby (1965). Modules which are isomorphic to submodules of each other. *Arch. der Math.*, 16, 184-185.

[5] P. A. Guil Asensio, B. Kalebogaz, A. K. Srivastava (2018). The Schroder-Bernstein problem for modules. *J.Algebra*, 498(15), 153-164.

[6] J. Xu (1996). Flat Covers of Modules. *Lecture Notes in Mathematics*, 1634. Springer-Verlag, Berlin.

[7] S. E. Dickson and K. R. Fuller (1969). Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope. *Pacic Journal of Mathematics*, 31, 655-658.

[8] N. Er, S. Singh, A.K. Srivastava (2013). Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls. *J. Algebra*, 379, 223-229.

[9] L. E. T. Wu and J. P. Jans (1967). On quasi-

projectives. *Illinois Journal of Mathematics*, 11 (1967), 439-448.

[10] Alberto Facchini (2019). Semilocal Categories and Modules with Semilocal Endomorphism Rings. Progress in Mathematics, 331.

GENERAL COVER OF MODULES AND SOME RELATED RESULS

Abstract: In this studying, we introduce the concept(definition) of general cover of a module, endomorphism coinvariant module and some of their properties. The paper also provides some results concerning the dual of Schroder-Bernstein problem for endomorphism $\chi-$ coinvariant modules.

Key words: general $\chi-$ cover; projective cover; automorphism $\chi-$ coinvariant module; Schroder-Bernstein's Theorem.